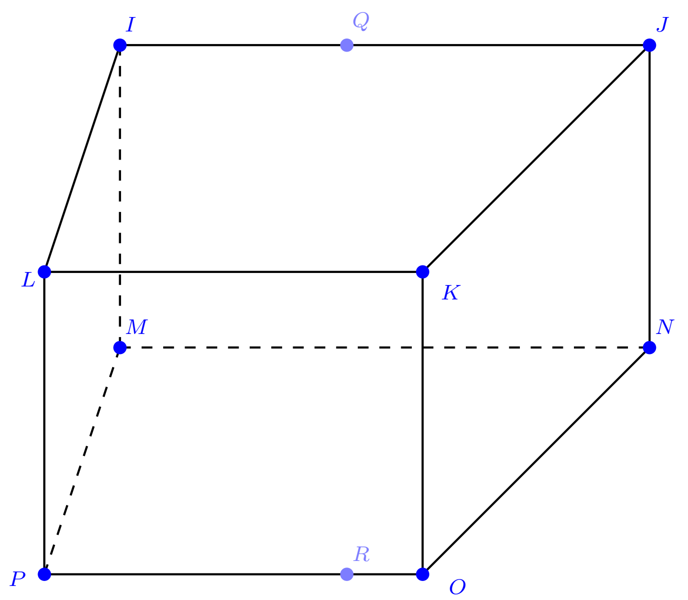
Mathématiques en Terminale S
Produit scalaire dans l'espace

Exercice 1

On considère le prisme ci-dessous constitués de rectangles et de trapèzes rectangles. On donne $IJ = 14, IQ = 6, LP = PR = 8$ et $PO = 10$.

1. Calculer $\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{PO}$,$\overrightarrow{IQ} \cdot \overrightarrow{QJ}$,$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{KO}$,$\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{JK}$ puis $\overrightarrow{RK} \cdot \overrightarrow{PO}$.
2. Calculer $\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{LO}$ puis $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{MN}$.

1. $\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{LK} = 0$
   $\overrightarrow{IQ} \cdot \overrightarrow{QJ} = IQ \times QJ = 6 \times 8 = 48$
   $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{KO} = \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IM} = IM^2 = 64$
   $\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{LI} \cdot (\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{LK}) = \overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{LI} = -LI^2$
   $\overrightarrow{RK} \cdot \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{RO} \cdot \overrightarrow{PO} = 20$
2. $\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{LO} = \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IO'} = (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MN}) \cdot \overrightarrow{IO'} = \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IO'} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{IO'} = IM^2 + MN \times MO' = 204$
   $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{QI} + \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{MN} = -QI \times MN + PR \times MN = -6 \times 14 + 8 \times 14 = 28$



Exercice 2

Soit $A(1, 0, 5), B(-1, 2, 2)$ et $C(0, 0, 1)$.

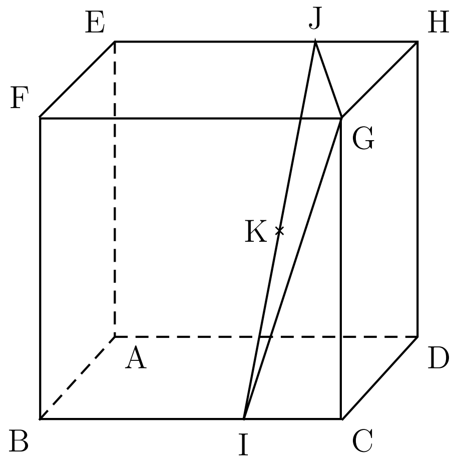
1. Prouver que ces trois points définissent un plan.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC).

1. IL suffit de prouver que ces tris points ne sont pas alignés... Pour cela on démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.Or : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
ces coordonnées n'étant pas proportionnelles, on en déduit au final que les points A, B et C définissent bien un plan dont une base B est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2. Soit $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC). Alors : $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ce qui se traduit par :
$\begin{cases} -2a + 2b - 3c = 0 \\ -a - 4c = 0 \end{cases}$ Or il existe une infinité de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ normal au plan (ABC) ; choisissons celui dont l'ordonnée est égale à 1 (ce choix étant arbitraire) en supposant qu'il existe....
Le système devient alors :
$\begin{cases} 2a + 3c = 2 \\ a = -4c \end{cases}$ dont les solutions sont $a = \dfrac{8}{5}$ et $c = -\dfrac{2}{5}$. Finalement :
$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{5} \\ 1 \\ -\dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$ ou plus simplement $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Exercice 3

On a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.



On a placé :

les points I et J tels que $\overrightarrow{\mathrm{BI}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EJ}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{EH}}$.

le milieu K de [IJ].

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).

Partie A

1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F.
   En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

   On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.
2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB).

On note $(x\ ;\ y\ ;\ 0)$ les coordonnées du point N.

1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J.
2. (a) Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).
   (b) Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{\mathrm{G}N} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{G}N} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FJ}}$ en fonction de x et y.
   (c) Déterminer les coordonnées du point N.
3. Placer alors le point P sur la figure en annexe.

Partie A

Aucune difficulté : on montre que $FI = FJ$ par des calculs élémentaires. La médiane (FK) est alors aussi la hauteur du triangle (FJI) donc (FK) et (IJ) sont perpendiculaires.
La droite (IJ) est perpendiculaire à deux droites non parallèles du plan (FGK) ; par définition elle est perpendiculaire ou orthogonale à ce plan.

Partie B

1. $F(1,0,1), G(1,1,1), I(1,\frac{2}{3},0), J(0,\frac{2}{3},1)$
2. (a) $\overrightarrow{GP}$ donc $\overrightarrow{GN}$ est un vecteur normal à (FJI) donc $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FJ}=0$

   (b) $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FI}=\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\-1\end{pmatrix}=\frac{2}{3}(y-1)+1=\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}$ et $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FJ}=\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}=$ $-(x-1)+\frac{2}{3}(y-1)=-x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}$

   (c) Des deux questions précédentes, $y=-\frac{1}{2}$ et $x=0$. Donc $N(0,-\frac{1}{2},0)$.
3. On place le point N et on trace la droite (GN) qui coupe la droite (FK) en P.On peut en effet démontrer que les points F,P et K sont alignés...

Exercice 4

On considère l'ensemble E des points M de l'espace dont les coordonnées (x,y,z) vérifient la relation : $6x-y+2z=2$.

1. Justifier que E est un plan de l'espace
2. Déterminer les coordonnées de trois autres points du plan E.
3. Déterminer les coordonnées de trois vecteurs normaux à ce plan.
4. Déterminer l'équation cartésienne d'un plan perpendiculaire à E.
5. Que dire du plan P d'équation $-12x+2y-4z=-4$?
6. Que dire du plan P' d'équation $6x-y+2z=0$?

1. L'ensemble des points $M(x,y,z)$ qui vérifient $ax+by+cz+d=0$ où a,b,c et d sont des coefficients quelconques mais non tous nuls,est un plan de l'espace.C'est le cours !
2. $(0,0,1),(0,2,2)$ et $(1,0,-2)$ vérifient l'équation de E donc appartiennent à E.
3. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}6\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à E ; Il suffit de multiplier ces coordonnées par un réel $k\neq 0$ pour en générer d'autres...
4. En référence au cours, cherchons un vecteur $\overrightarrow{m}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ orthogonal à $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}6\\-1\\2\end{pmatrix}$. Leur produit scalaire étant nul, on obtient $6a'-b'+2c'=0$. Le triplet $(1,2,-2)$ convient.

Une équation cartésienne d'un plan perpendiculaire à E serait alors : $x + 2y - 2z + 1 = 0$, la valeur de d étant choisie arbitrairement.

5. C'est l'équation du même plan E car les valeurs des coefficients $(-12, 2, -4, -4)$ sont proportionnelles à $(6, -1, 2, 2)$
6. Ce plan P' est seulement parallèle à E car seuls les coefficients (a, b, c) sont proportionnels à $(6, -1, 2)$.

Exercice 5

On considère les points $A(1, 0, 2)$, $B(-2, 1, 5)$ et $C(2, -2, 0)$.

1. (a) Justifier que les points A, B et C définissent un plan de l'espace.
   (b) Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(4, -3, 5)$ est un vecteur normal du plan (ABC).
   (c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit D le point de coordonnées $(3, 3, -3)$. Déterminer l'équation du plan (P_1) passant par D et parallèle (ABC).
3. Soit (P_2) le plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$.
   (a) Justifier que les plans (ABC) et (P_2) sont sécants en une droite D.
   (b) Déterminer une équation paramétrique de la droite D.

1. (a) Facile ! Voir au-dessus.
   (b) Facile aussi.Il suffit de prouver que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
   (c) Une équation cartésienne de (ABC) se présente donc sous la forme $4x - 3y + 5z + d = 0$. ON trouve d en remplaçant (x, y, z) par les coordonnées de A, B ou C.On trouve $d = -14$.
2. Facile ! Seule la valeur de d change : $(P_1) : 4x - 3y + 5z + 12 = 0$.
3. (a) Les vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n_2}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : les plans ne sont pas donc parallèles et se coupent selon une droite D.
   (b) Il faut et il suffit de rechercher un point et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \omega \end{pmatrix}$ de cette droite. Un point $M(x, y, z)$ appartient aux deux plans si ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x - 3y + 5z - 14 & = & 0 \\ x + y + z - 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Posons $z = t$, ce choix étant encore une fois arbitraire.. Alors on obtient au final, $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{17}{7} - \frac{8}{7}t \\ y & = & -\frac{10}{7} + \frac{1}{7}t \\ z & = & t \end{array} \right.$

où $t \in \mathbb{R}$ ou plus simplement $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{17}{7} - 8t \\ y & = & -\frac{10}{7} + t \\ z & = & 7t \end{array}\right.$

Exercice 6

On considère la droite D dont la représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 10-t \\ z & = & 20+2t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$ et le plan P d'équation cartésienne $3x - y - z = 1$.

1. Justifier que la droite D coupe le plan P. On appelle N le point d'intersection.
2. Déterminer les coordonnées de N.

1. C'est une histoire de direction ! Un vecteur directeur de D est $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de P est $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; ces vecteurs ne sont pas orthogonaux donc D coupe P.
2. Les coordonnées (x_D, y_D, z_D) de D vérifient les deux équations : donc il existe une valeur de t pour laquelle $3(-2+t)-(10-t)-(20+2t) = 1$, c'est-à-dire $2t = 37$ d'où $t = \frac{37}{2}$. Donc $D(\frac{33}{2}, -\frac{17}{2}, \frac{77}{2})$.

Exercice 7

On considère le plan P d'équation $x - y + 2z = 3$.

1. Déterminer la distance du point $A(1, 1, 5)$ au plan P.
2. Déterminer la distance du plan P à l'origine du repère.

1. C'est du cours ! $d = \frac{|x_A - y_A + 2z_A - 3|}{\|\overrightarrow{n}\|} =$ où $\overrightarrow{n}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ D'où $d = \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$
2. Pareil ! L'origine O ayant pour coordonnées $(0, 0, 0)$ on obtient $d = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Exercice 8

On considère les points $A(3,-2,10), B(0,5,6), C(-2,2,4)$ et $D(10,-5,1)$. Déterminer le volume de la pyramide $ABCD$.

Facile ! ou pas lorsque qu'on ne connaît pas la formule $V = \dfrac{1}{3} \times \text{Base} \times \text{hauteur}$. Choisissons pour base le triangle ABC dont on calculera l'aire et la hauteur est donc la distance du point D au plan (ABC). Après quelques calculs presque élémentaires que je vous épargne ici.., on trouve : $V = \dfrac{11\sqrt{1209}}{6}$