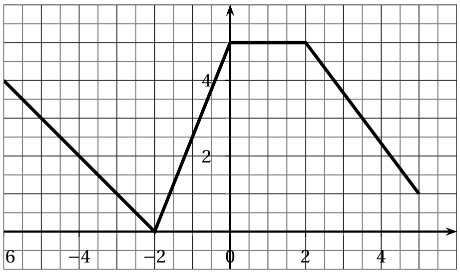
APPLICATION DE LA DÉFINITION : UNE INTÉGRALE D'UNE FONCTION POSITIVE EST L'AIRE D'UN DOMAINE...

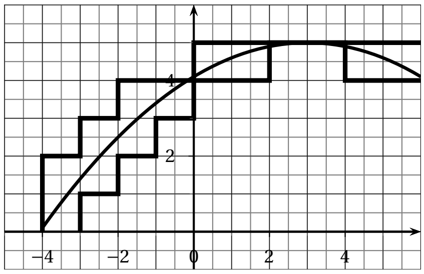
Exercice 1 ✯Ci-dessous, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Déterminer la valeur de $\int_a^b f(x)\,dx$ dans les cas suivants :



① $a=-2$ et $b=2$: le domaine se réduit alors à un triangle et un rectangle dont les aires sont respectivement égales à :$\frac{2\times 5}{2}$ et 2×5, donc $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 5+10=15$

② $a=-6$ et $b=5$: de la même façon $\int_{-6}^{5} f(x)\,dx = 8+15+9=32$

Exercice 2 ✯ Ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dont on connaît pas l'expression algébrique :



Par la méthode des rectangles, donner un encadrement de $\int_{-4}^{6} f(x)\,dx$ avec la précision permise par le graphique.*On trouve par exemple :* $32 \leq \int_{-4}^{6} f(x)\,dx \leq 38$

CALCULS D'INTÉGRALE PAR LA RECHERCHE D'UNE PRIMITIVE.

Exercice 3 ✯Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction intégrée puis calculer l'intégrale. Par exemple :

$$\int_{-1}^{3} e^{-2x+1}\,dx = [-\frac{1}{2}e^{-2x+1}]_{-1}^{3} = -\frac{1}{2}e^{-2\times 3+1} - (-\frac{1}{2}e^{-2\times(-1)+1}) = \frac{e^3-e^{-5}}{2} \approx 10.04$$

① $\int_{-2}^{2} x^3+x^2+1\,dx = [\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x]_{-2}^{2} = \frac{28}{3}$

② $\int_{0}^{4} 0.5x^2\,dx = [\frac{1}{6}x^3]_0^4 = \frac{32}{3}$

③ $\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_{-1}^{1} = e^{-1}-e = \frac{1-e^2}{e}$

④ $\int_{1}^{5} \frac{3}{x}\,dx = [3\ln(x)]_1^5 = 3\ln(5)$

⑤ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

⑥ $\int_{-4}^{4} |\,x\,|\,dx = \int_{-4}^{0} |\,x\,|\,dx + \int_{0}^{4} |\,x\,|\,dx = \int_{-4}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{4} x\,dx = 16$

⑦ $\int_{-1}^{2} e^{2-5x}\,dx = [-\frac{1}{5}e^{2-5x}]_{-1}^{2} = \frac{e^{-8}-e^7}{5}$

⑧ $\int_{0}^{1} \frac{2}{3x+1}\,dx = [\frac{2}{3}\ln(3x+1)]_0^1 = \frac{2}{3}\ln(4)$

⑨ $\int_{0}^{2} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt = [-\ln(1+e^{-t})]_0^2 = \ln(2)-\ln(1+e^{-2}) = \ln(\frac{2}{1+e^{-2}})$

Exercice 4 ✯On considère l'intégrale $H = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$.

① Déterminer les nombres a et b tels que $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$ pour tous x dans $[0;1]$.*Remarquons que nous ne connaissons pas une primitive explicite de* $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ *; c'est pour cette raison que nous transformons son écriture. On utilise la méthode par identification qui permet d'identifier les coefficients de deux expressions égales.*
En effet pour tout x dans $[0;1]$, $\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$. *Ce qui donne* $a+b=0$ *puis* $2a+b=1$. *On en déduit que* $a=1$ *et* $b=-1$

② En déduire la valeur exacte de H puis une valeur approchée au centième.*Ainsi*
$H = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int_0^1 (\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{x+2})\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{(x+2)}\,dx = [ln(x+1)]_0^1 - [ln(x+2)]_0^1 = ln(\frac{4}{3}) \approx 0.29$

Exercice 5 ✩On considère l'intégrale $G = \int_0^1 \frac{1}{1+e^t}\,dt$.

① Prouver que pour réel t, on a : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ *Facile en réduisant au même dénominateur...*

② Calculer alors la valeur exacte de G avant d'en donner une valeur approchée au centième.
$G = \int_0^1 \frac{1}{1+e^t}\,dt = \int_0^1 1\,dt - \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = 1 - [\ln(1+e^t)]_0^1 = 1 - \ln(1+e) + \ln(2)$.

Exercice 6 ✩✩ Une question simple pour peu que vous comprenez ce que vous faites :

$$\text{Que vaut l'intégrale } I = \int_0^5 \frac{t}{1+e^t}\,dx\,?$$

L'astuce réside dans le « dx » alors que la fonction intégrée ne dépend que de t. À ce titre si x est effectivement la variable la fonction qui à t associe $\frac{t}{1+e^t}$ est une constante!Ainsi :

$$I = \int_0^5 \frac{t}{1+e^t}\,dx = \frac{t}{1+e^t} \times \int_0^5 1\,dx = \frac{5t}{1+e^t}$$

Calculs d'intégrale par d'autres méthodes...

Exercice 7 On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)\,dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\,dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx$

① ❶ Déterminer une primitive de $\cos(2x)$.*Une primitive de* $cos(2x)$ *est* $\frac{1}{2}sin(2x)$

❷ En déduire la valeur exacte de K.*Ainsi* $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2x)\,dx = [\frac{1}{2}sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = 0.5$

② Que vaut $I+J$?$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2(x) + sin^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dx = \frac{\pi}{4}$

③ Que vaut $I-J$?$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2(x) - sin^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2x)\,dx = K = 0.5$

④ Des deux questions précédentes en déduire la valeur de I et J.*Des deux relations précédentes sur I et J en en déduit que* $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ *et* $J = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$