TOUJOURS AVEC DES PRIMITIVES...

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :
La principale difficulté est la recherche d'une primitive de la fonction à intégrer..

① $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(2x) - \cos(3x)\, dx = [-\frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{3}\sin(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{3}) - \frac{1}{3}\sin(\frac{\pi}{2}) - (-\frac{1}{2}\cos(0) - \frac{1}{3}\sin(0)) = -\frac{1}{12}$

② $\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\, dx = [-\frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2+1}]_0^1 = \frac{3}{4}$

③ $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\, dx = [\frac{1}{2}\ln(x)^2]_1^e = \frac{1}{2}$

UN PEU DE VALEUR MOYENNE...

Exercice 2

① Déterminer la valeur moyenne de la fonction carrée sur $[-2;2]$ *On applique la définition et pour des raisons de symétries, je simplifie le calcul en ne considérant que l'intégrale entre 0 et 2 puis en multipliant par 2 :*
$\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2} x^2\, dx = \frac{1}{4} \times 2 \times \int_0^2 x^2\, dx = \frac{4}{3}$

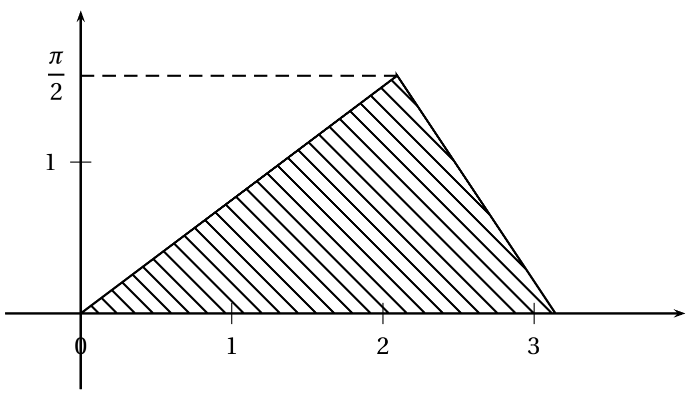
② Déterminer la valeur moyenne de la fonction sinus sur $[-\pi;\pi]$ *Pour des raisons de symétrie, la valeur moyenne du sinus est nulle sur tout intervalle de la forme $I = [-\alpha;\alpha]$ quelle que soit α ; et c'est vrai pour toute fonction impaire.*

Exercice 3 On considère la fonction f définie pour tout t dans $[0;\pi]$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3} \\ \frac{3}{2}(\pi - t) & \text{si } \frac{2\pi}{3} < t \leq \pi \end{cases}$$

① f est-elle continue sur $[0;\pi]$? *Oui car la limite à gauche comme à droite de f en $\frac{2\pi}{3}$ est égale et vaut $\frac{\pi}{2}$.*

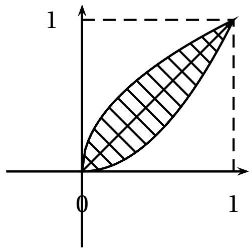
② Calculer la valeur moyenne de f sur $[0;\pi]$. *Il faut pour cela calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} f(x)\, dx$ soit en utilisant la relation de Chasles soit en considérant l'aire du domaine qu'elle représente :*



Dans les deux cas, on trouve $\frac{\pi}{4}$

UN PEU D'AIRE AUSSI...

Exercice 4 ✯ Déterminer l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g définies respectivement sur $[0;1]$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$.



D'après le cours, il faut calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2\,dx = [\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{3}$$

ET DE NOUVELLES FONCTIONS...

Exercice 5 ✯✯ On considère une fonction f continue et positive sur $[a,b]$. Alors la fonction F définie pour tout x dans $[a,b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est parfaitement définie et admet pour dérivée $F'(x) = f(x)$.Applications :

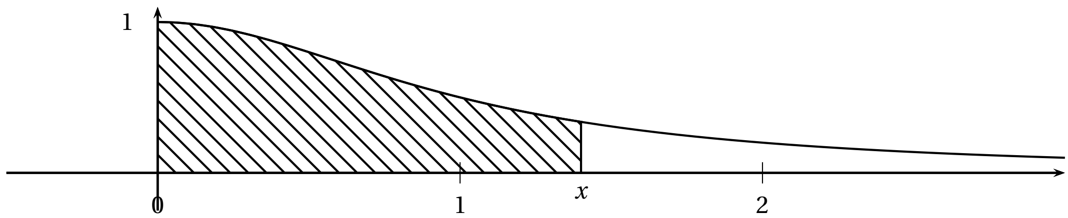
① Déterminer les variations de la fonction g définie pour tout $x \geq 0$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ *D'après la définition ci-dessus,* $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} > 0, \forall x \in [0;+\infty[$. *Donc la fonction g est strictement croissante sur* $[0;+\infty[$

② On considère la fonction A définie pour tout $x \geq 0$ par : $A(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$

❶ Déterminer la dérivée A' de A.*De la même façon,* $A'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

❷ Justifier que la fonction A est croissante sur $[0;+\infty[$. *Donc pour tout x dans* $[0;+\infty[$, $A'(x) > 0$ *donc A est croissante sur* $[0;+\infty[$

❸ Donner une interprétation graphique de ce que représente $A(x)$.
La fonction qui à t associe $\dfrac{1}{1+t^2}$ *est positive et continue sur* $[0;+\infty[$ *; donc l'intégrale peut être associée à l'aire du domaine compris entre* 0 *et x sur la largeur et entre l'axe des abscisses et la courbe représentative en hauteur :*



❹ Une primitive de $t \to \dfrac{1}{t^2+1}$ est $\arctan(t)$. Saurez-vous déterminez $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} A(x)$? *Donc connaissant une primitive de* $t \to \dfrac{1}{t^2+1}$ *, on en déduit que :* $A(x) = arctan(x) - arctan(0)$. *Or* $arctan(0) = 0$ *car* $tan(x) = 0$ *si* $x = 0$ *et* $tan(x) = +\infty$ *si* $x = \dfrac{\pi}{2}$.*Donc :*

$$\lim_{x\to+\infty} A(x) = \frac{\pi}{2}$$

ET SI ON COMPLEXIFIAIT UN PEU...

Exercice 6 ✯✯ L'exercice suivant montre comment déterminer une primitive de $\cos^n(x)$ pour tout entier n à partir des formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Dans cet exercice, on choisit $n = 3$ pour illustrer la méthode.On rappelle aussi que pour tous nombres a et b , $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

① En utilisant les formules ci-dessous, prouver que pour tout x :

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)$$

$\cos^3(x) = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix}+3\times e^{2ix}\times e^{-ix}+3\times e^{ix}\times e^{-2ix}+e^{-3ix}) = \frac{1}{8}(e^{3ix}+e^{-3ix}+3(e^{ix}+e^{-ix})) = \frac{1}{8}(2\cos(3x)+3\times2\times\cos(x))$
Cette transformation s'appelle une **linéarisation**.

② En déduire $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx$.

Ainsi $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x))\,dx = [\frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$

③ Linéariser $\sin^4(x)$. *Avec la même méthode, on trouve* $sin^4(x) = \frac{cos(4x)-4cos(2x)+6}{8}$

Exercice 7 ✯✯✯ Dans le même esprit, comment calculer l'intégrale :

$$K = \int_0^{\pi} e^x\cos(2x)\,dx$$

sachant qu'on ne sait pas [1] déterminer une primitive de la fonction intégrée.
Lâchons-nous et généralisons le résultat suivant : une primitive de $exp(\alpha\times x)$ est $\frac{1}{\alpha}\times exp(\alpha\times x)$ pour tout α **complexe**!

① À l'aide des formules d'Euler, exprimez la fonction f définie pour tout x par $e^x\cos(2x)$ comme la somme de deux exponentielles complexes. $e^x cos(2x) = e^x\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} = \frac{1}{2}(e^{(2i+1)x}+e^{(1-2i)x})$

② En déduire une primitive F de f avec des coefficients complexes. *Une primitive de* $f(x) = \frac{1}{2}(e^{3ix}+e^{-ix})$ *est alors* $F(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2i+1}e^{(2i+1)x}+\frac{1}{1-2i}e^{(1-2i)x})$

③ Prouver alors que $K = \int_0^{\pi} e^x\cos(2x)\,dx = \frac{e^{\pi}-1}{5}$

Ainsi $K = \int_0^{\pi} e^x cos(2x)\,dx = [\frac{1}{2}(\frac{1}{2i+1}e^{(2i+1)x}+\frac{1}{1-2i}e^{(1-2i)x})]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2i+1}e^{(2i+1)\pi}+\frac{1}{1-2i}e^{(1-2i)\pi}-(\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{1-2i}))$
D'où avec $\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{1-2i} = \frac{2}{5}$, $K = \frac{1}{2}(\frac{2}{5}e^{\pi}+\frac{2}{5}) = \frac{e^{\pi}-1}{5}$.

Exercice 8 ✯✯**L'intégration par parties**. Cette méthode de calcul d'intégral est maintenant hors programme mais reste incontournable en mathématiques. Elle repose sur la formule de dérivation :

1. en terminale S...

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

qui peut s'écrire encore : $u \times v' = (u \times v)' - u' \times v$ qui devient en intégrant (quelque soit les bornes de l'intégrale..) :

$$\int_a^b u \times v' = \int_a^b (u \times v)' - \int_a^b u' \times v$$

Mais une primitive de $(u \times v)'$ est $u \times v$. Donc la formule devient finalement :

$$\int_a^b u \times v' = [u \times v]_a^b - \int_a^b u' \times v$$

Par cette méthode déterminer :

① $\int_0^1 xe^x \, dx$
En posant $u = x$ et $v' = e^x$, on a : $\int_0^1 xe^x \, dx = [x \times e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x \, dx = e - [e^x]_0^1 = 1$

② $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\sin(2t) \, dt$
En posant $u = t$ et $v' = sin(2t)$, on a
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} t sin(2t) \, dt = [t \times (-\frac{1}{2} cos(2t))]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-\frac{1}{2} cos(2t)) \, dt = [-\frac{t}{2} cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}[\frac{1}{2} sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$