TOUJOURS AVEC DES PRIMITIVES...

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

① $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(2x) - \cos(3x)\,dx$ ② $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx$ ③ $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

UN PEU DE VALEUR MOYENNE...

Exercice 2

① Déterminer la valeur moyenne de la fonction carrée sur $[-2;2]$

② Déterminer la valeur moyenne de la fonction sinus sur $[-\pi;\pi]$

Exercice 3 On considère la fonction f définie pour tout t dans $[0;\pi]$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}t & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{2\pi}{3} \\ \dfrac{3}{2}(\pi - t) & \text{si } \dfrac{2\pi}{3} < t \leq \pi \end{cases}$$

① f est-elle continue sur $[0;\pi]$?

② Calculer la valeur moyenne de f sur $[0;\pi]$.

UN PEU D'AIRE AUSSI...

Exercice 4 ✯ Déterminer l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g définies respectivement sur $[0;1]$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$.

ET DE NOUVELLES FONCTIONS...

Exercice 5 ✯✯ On considère une fonction f continue et positive sur $[a,b]$. Alors la fonction F définie pour tout x dans $[a,b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est parfaitement définie et admet pour dérivée $F'(x) = f(x)$.Applications :

① Déterminer les variations de la fonction g définie pour tout $x \geq 0$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

② On considère la fonction A définie pour tout $x \geq 0$ par : $A(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$

❶ Déterminer la dérivée A' de A.

❷ Justifier que la fonction A est croissante sur $[0;+\infty[$.

❸ Donner une interprétation graphique de ce que représente $A(x)$.

❹ Une primitive de $t \to \dfrac{1}{t^2+1}$ est $\arctan(t)$. Saurez-vous déterminez $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)$?

ET SI ON COMPLEXIFIAIT UN PEU...

Exercice 6 ✯✯ L'exercice suivant montre comment déterminer une primitive de $\cos^n(x)$ pour tout entier n à partir des formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Dans cet exercice, on choisit $n = 3$ pour illustrer la méthode.On rappelle aussi que pour tous nombres a et b , $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

① En utilisant les formules ci-dessous, prouver que pour tout x :

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)$$

Cette transformation s'appelle une **linéarisation**.

② En déduire $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx$

③ Linéariser $\sin^4(x)$.

Exercice 7 ✯✯✯ Dans le même esprit, comment calculer l'intégrale :

$$K = \int_0^{\pi} e^x \cos(2x)\,dx$$

sachant qu'on ne sait pas [1] déterminer une primitive de la fonction intégrée.

Lâchons-nous et généralisons le résultat suivant : une primitive de $exp(\alpha \times x)$ est $\frac{1}{\alpha} \times exp(\alpha \times x)$ pour tout α **complexe**!

① À l'aide des formules d'Euler, exprimez la fonction f définie pour tout x par $e^x\cos(2x)$ comme la somme de deux exponentielles complexes.

② En déduire une primitive F de f avec des coefficients complexes.

③ Prouver alors que $K = \int_0^{\pi} e^x\cos(2x)\,dx = \frac{e^{\pi}-1}{5}$

Exercice 8 ✯✯**L'intégration par parties**. Cette méthode de calcul d'intégral est maintenant hors programme mais reste incontournable en mathématiques. Elle repose sur la formule de dérivation :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

qui peut s'écrire encore : $u \times v' = (u \times v)' - u' \times v$ qui devient en intégrant (quelque soit les bornes de l'intégrale..) :

$$\int_a^b u \times v' = \int_a^b (u \times v)' - \int_a^b u' \times v$$

Mais une primitive de $(u \times v)'$ est $u \times v$. Donc la formule devient finalement :

1. en terminale S...

$$\int_a^b u \times v' = [u \times v]_a^b - \int_a^b u' \times v$$

Par cette méthode déterminer :

① $\int_0^1 xe^x \, dx$

② $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\sin(2t) \, dt$