Exercice 1 Voir la correction

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0{,}286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.
   On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.
2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans ?
4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure Ã 0,999 ?

Exercice 2 Voir la correction

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité pour un client d'attendre moins de t min est définie par :

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) On suppose qu'une primitive F de la fonction f définie par :

   $$f(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$$

   s'écrit sous la forme :

   $$F(x) = (ax + b)e^{-\lambda x}$$

   Déterminer les valeurs de a et b.

   (b) Déterminer alors le temps moyen d'attente en fonction de λ.
2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min ? plus de 5 min ?
3. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min ? Comment expliquez-vous ce résultat ?

Exercice 3 Voir la correction

Les parties A et B sont indépendantes

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.
3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$.

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :
   (a) si ce composant est défectueux ;
   (b) si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.
2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.
   Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :
   $$P(T \geqslant t) = 0{,}02\mathrm{e}^{-5\times 10^{-4}t} + 0{,}98\mathrm{e}^{-10^{-4}t}.$$
   (on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).
3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?
   Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Exercice 4 Voir la correction
Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres.
Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

1. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en mm.
   On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,4.
   Montrer qu'une valeur approchée à 0,000 1 près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4.
2. On met en place un contrôle de production tel que 98 % des billes hors norme sont écartés et 99 % des billes correctes sont conservées.
   On choisit une bille au hasard dans la production. On note N l'événement : « la bille choisie est aux normes », A l'événement : « la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle ».
   (a) Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement A.
   (c) Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes.
On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de 0,012 4.
On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.
On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?
2. Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme ?
4. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

Exercice 5 Voir la correction

Deux amis se donnent rendez-vous dans un centre commercial entre $12h00$ et $14h00$.
Noah décide d'arriver à $12h30$ alors que Mathieu arrive au hasard entre $12h00$ et $13h00$.On appelle la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée de Mathieu.

1. Justifier que T suit une loi uniforme sur l'intervalle $[12;13]$.
2. Calculer la probabilité que Mathieu arrive avant Noah.
3. Mathieu n'arrivera pas avant $12h15$.Calculer alors la probabilité que Mathieu arrive avant Noah.
4. Calculer la probabilité que Noah attende plus de 10 minutes.

Exercice 6 Voir la correction

Les parties A B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.
La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.
   Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.
   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leqslant -1{,}751) \approx 0{,}040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

Correction exercice n°1
Revenir exercice

1. X suit la loi de durée de vie sans vieillissement ou encore loi exponentielle de paramètre λ ; donc

$$p(X>10)=\mathrm{e}^{-10\lambda}=0{,}286 \iff -10\lambda=\ln 0{,}286$$

ou encore $\lambda=-\dfrac{\ln 0{,}286}{10}$.
La calculatrice donne $\lambda=0{,}125$ à 10^{-3} près.

2. 6 mois = 0,5 année. On a donc $p(X\leqslant 0{,}5)=1-\mathrm{e}^{-0{,}125\times 0{,}5}=1-\mathrm{e}^{-0{,}0625}\approx 0{,}061$.

3. L'appareil ayant déjà fonctionné 8 ans, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans est égale à $p_{(X>8)}(X>10)=\dfrac{p[(X>10)\cap(X>8)]}{p(X>8)}=\dfrac{p(X>10)}{p(X>8)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-0{,}125\times 10}}{\mathrm{e}^{-0{,}125\times 8}}=\mathrm{e}^{-0{,}125\times 2}\approx 0{,}779$.
On peut aussi se rappeler du modèle que X désigne, à savoir une durée de vie sans vieillissement. Ainsi :

$$p_{(X>8)}(X>10)=p_{(X>8)}(X>8+2)=p(X>2)=e^{-0.125\times 2}\approx 0{,}779$$

4. On a ici un schéma de Bernoulli, avec comme succès le fait pour un oscilloscope d'avoir une durée de vie supérieure à 10 ans, dont la probabilité est égale à 0,286 et un nombre d'appareils égal à 15.
La probabilité de n'avoir aucun oscilloscope en état de marche au bout de 10 ans est donc : $(1-0{,}286)^{15}=0{,}714^{15}$.
Donc inversement la probabilité d'avoir au moins un oscilloscope en état de marche au bout de 10 ans est égale à :

$$1-0{,}714^{15}\approx 0{,}994.$$

5. On reprend la question précédente avec non plus 15, mais n oscilloscopes. La probabilité qu'au moins 1 sur les n oscilloscopes fonctionne après 10 ans est donc : $1-0{,}714^n$.
Il faut chercher le plus petit naturel n tel que

$$1-0{,}714^n\geqslant 0{,}999 \iff 0{,}001\geqslant 0{,}714^n \iff \ln 0{,}001\geqslant n\ln 0{,}714$$

(par croissance de la fonction ln), soit finalement $\dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}714}\leqslant n$
(car $\ln 0{,}714<0$).
La calculatrice donne $20{,}5\leqslant n$.
Le premier naturel convenant est donc 21.

Correction exercice n°2
Revenir exercice

1. (a) F est une primitive de f donc quelque soit le réel x, $F'(x)=f(x)$ soit $(a-\lambda(ax+b))e^{-\lambda x}=-\lambda xe^{-\lambda x}$. Relation qui donne : $-\lambda a=-\lambda$ et $a-\lambda b=0$ soit $a=1$ et $b=\dfrac{1}{\lambda}$. Donc :

$$F(x)=(x+\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda x}$$

   (b) Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}=0$, on en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}[(x+\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda x}]_0^t=(t+\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda t}-(0+\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\times 0}=\frac{1}{\lambda}$

2. Si le temps moyen d'attente est égal à 5 minutes, alors $\dfrac{1}{\lambda}=5\iff\lambda=\dfrac{1}{5}=0{,}2$.
La probabilité d'attendre plus de 10 minutes est : $1-p(X\leqslant 10)=1-\displaystyle\int_0^{10}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=1-\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{10}=\mathrm{e}^{-2}$. (soit $\approx 0{,}135$ au millième près)
De même la probabilité d'attendre plus de 5 minutes est : $1-p(X\leqslant 5)=1-\displaystyle\int_0^{5}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=1-\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{5}=\mathrm{e}^{-1}$. (soit $\approx 0{,}368$ au millième près)

3. Il faut calculer $p(X \geqslant 15)$ sachant que $X \geqslant 10$. Or
$$p_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15) = \frac{p(X \geqslant 15 \text{ et } X \geqslant 10)}{p(X \geqslant 10)} = \frac{p(X \geqslant 15)}{p(X \geqslant 10)} = \frac{1 - p(X \leqslant 15)}{p(X \geqslant 10)} = \frac{1 - \int_0^{15} 0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2x}\,\mathrm{d}x}{p(X \geqslant 10)} = \frac{\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-2}} = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368.$$
On a $p_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15) = p(X \geqslant 5)$. Donc la probabilité est celle du temps supplémentaire d'attente. La loi exponentielle est une loi sans vieillissement.

Correction exercice n°3

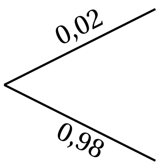
Revenir exercice

1. On a une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}02$.
   On a donc $p(X = 2) = \binom{50}{2} \times 0{,}02^2 \times 0{,}98^{48} \approx 0{,}1858 \approx 0{,}19$.
2. La probabilité cherchée est $p(X > 0) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}98^{50} \approx 0{,}635 \approx 0{,}64$.
3. On a $\mathrm{E}(X) = n \times p = 50 \times 0{,}02 = 1$.

Partie B

1. (a) On a $P([1\,000\,;\,+\infty]) = 1 - \displaystyle\int_0^{1000} 5 \times 10^{-4}\mathrm{e}^{-5\times 10^{-4}t}\,\mathrm{d}t = 1 + \left[\mathrm{e}^{-5\times 10^{-4}t}\right]_0^{1000} = \mathrm{e}^{-5\times 10^{-4}\times 10^3} = \mathrm{e}^{-0{,}5} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 0{,}606 \approx 0{,}61$.

   (b) Même calcul avec λ_2 : $P([1\,000\,;\,+\infty]) =$
   $1 - \displaystyle\int_0^{1\,000} 10^{-4}\mathrm{e}^{10^{-4}t}\,\mathrm{d}t = 1 + \left[\mathrm{e}^{-10^{-4}t}\right]_0^{1\,000} = \mathrm{e}^{10^{-4}\times 10^3} = \mathrm{e}^{-0{,}1} \approx 0{,}904 \approx 0{,}90$.
2.



$$P(T \geqslant t) = 1 - \int_0^t 5 \times 10^{-4}\mathrm{e}^{-5\times 10^{-4}t}\,\mathrm{d}t = 0{,}02\mathrm{e}^{-5\times 10^{-4}t}$$

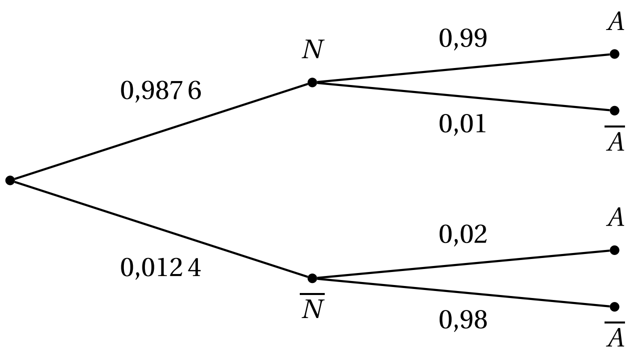
$$P(T \geqslant t) = 1 - \int_0^t 10^{-4}\mathrm{e}^{-10^{-4}t}\,\mathrm{d}t = 0{,}98\mathrm{e}^{-10^{-4}t}$$

   D'où en faisant la somme, le résultat demandé.
3. On a $P_{(T\geqslant 1\,000)}(\text{défectueux}) = \dfrac{P\left[(T \geqslant 1\,000) \cap (\text{défectueux})\right]}{P(T \geqslant 1\,000)} =$
$$\frac{0{,}02 \times \mathrm{e}^{-0{,}5}}{0{,}02 \times \mathrm{e}^{-0{,}5} + 0{,}98 \times \mathrm{e}^{-10^{-1}}} \approx 0{,}013 \approx 0{,}01.$$

Correction exercice n°4

Revenir exercice

1. Une bille est dans la norme si son diamètre est entre 9 et 11 mm ; donc la probabilité qu'une bille soit dans la norme est
   $P(9 \leq X \leq 11) = P(X \leq 11) - P(X \leq 9)$.
   La probabilité que la bille soit hors norme est donc :
   $1 - (P(X \leq 11) - P(X \leq 9)) = 1 - (0{,}993\,790\,34 - 0{,}006\,209\,67) = 1 - 0{,}987\,580\,67 = 0{,}012\,419\,33$; donc une valeur approchée à $0{,}000\,1$ de la probabilité qu'une bille soit hors norme est $0{,}012\,4$.
2. (a) On construit un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé :



(b) D'après la formule des probabilités totales :
$P(A) = P(N \cap A) + P(\overline{N} \cap A) = P(N) \times P_N(A) + P(\overline{N}) \times P_{\overline{N}}(A)$
$= 0{,}9876 \times 0{,}99 + 0{,}0124 \times 0{,}02 = 0{,}977724 + 0{,}000248 = 0{,}977972$
$\approx 0{,}9780$
La probabilité de A est 0,9780 (arrondie au dix-millième).

(c) On cherche : $P_A(\overline{N}) = \dfrac{P(A \cap \overline{N})}{P(A)} = \dfrac{0{,}000248}{0{,}977972} \approx 0{,}0003$
La probabilité qu'une bille acceptée soit hors norme est 0,0003 (arrondie au dix-millième).

Partie B

1. La probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,0124 : on admet que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.
   Donc la variable aléatoire Y qui,à tout sac de 100 billes, associe le nombre de billes hors norme, suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}0124$.
2. L'espérance mathématique et l'écart type d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p sont respectivement np et $\sqrt{np(1-p)}$.
   Donc $E(Y) = np = 100 \times 0{,}0124 = 1{,}24$
   et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0{,}0124 \times 0{,}9876} \approx 1{,}1066$.
3. La probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme est $P(Y = 2)$.
   $P(Y=2) = \dbinom{n}{2} p^2(1-p)^{n-2} = \dbinom{100}{2} \times 0{,}0124^2 \times 0{,}9876^{98} \approx 0{,}02241$.
4. Un sac de billes contient au plus une bille hors norme est l'événement $(Y \leq 1)$.
   $P(Y \leq 1) = P(Y=0) + P(Y=1) = \dbinom{100}{0} \times 0{,}0124^0 \times 0{,}9876^{100} + \dbinom{100}{1} \times 0{,}0124^1 \times 0{,}9876^{99} \approx 0{,}2871 + 0{,}3605 \approx 0{,}6476$.

Correction exercice n°5

Revenir exercice

Deux amis se donnent rendez-vous dans un centre commercial entre $12h00$ et $14h00$.
Noah décide d'arriver à $12h30$ alors que Mathieu arrive au hasard entre $12h00$ et $13h00$.On appelle la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée de Mathieu.

1. T est un nombre aléatoire de l'intervalle $[12;13]$. Donc T suit la loi uniforme sur cet intervalle.
2. On cherche $p(12 \leq T \leq 12{,}5) = \dfrac{12.5-12}{13-12} = 0.5$ soit une chance sur deux.
3. On cherche $p_{(T\geq 12{,}25)}(T \leq 12{,}5) = \dfrac{p((T \geq 12{,}25) \cup (T \leq 12{,}5))}{T \geq 12{,}25} = \dfrac{12.25 \leq T \leq 12.5}{T \geq 12{,}25} = \dfrac{12.5-12.25}{13-12.25} = \dfrac{0.25}{0.75} = \dfrac{1}{3}$.
4. On cherche $p(12h40 \leq T \leq 13h) = \dfrac{13h - 12h40}{13h-12h} = \dfrac{20\text{min}}{60\text{min}} = \dfrac{1}{3}$

Correction exercice n°6

Revenir exercice

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. $P(390 \leqslant X \leqslant 410) = P(X \leqslant 410) - P(X < 390) = 0{,}818 - 0{,}182 = 0{,}636$.

2. Un pain choisi au hasard dans la production est commercialisable si et seulement si « $X \geqslant 385$ ».
   « $X \geqslant 385$ »est l'événement contraire de « $X < 385$ ».
   On a donc $p(X \geqslant 385) = 1 - p(X < 385) = 1 - 0{,}086 = 0{,}914$.

3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

   Soit Y la variable aléatoire de paramètres $\mu = 400$ et σ, on a :

   $p(X \geqslant 385) = 0.96 \Leftrightarrow 1 - p(Y < 385) = 0{,}96 \Leftrightarrow p(Y < 385) = 0{,}04$

   Si Y suit une loi normale de paramètres $\mu = 400$ et σ, on sait que $Z = \dfrac{X - 400}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite et $p(Y < 385) = 0{,}04 \Leftrightarrow P\left(Z \leqslant \dfrac{385 - 400}{\sigma}\right) = 0{,}04$.

   Or $P(Z \leqslant -1{,}751) \approx 0{,}040$.On a donc : $\dfrac{-15}{\sigma} = -1.751 \Leftrightarrow \sigma = \dfrac{15}{1.751} = 8{,}6$.

   Pour $\sigma = 8{,}6$, au dixième près ; la probabilité qu'un pain soit commercialisable est de 96%

Partie B

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300 est de la forme .

$$I_{300} = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

   avec $p = 0{,}96$ et $n = 300$.

   On a donc : $I_{300} = [0{,}93\ ;\ 0{,}99]$

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables. Ce qui représente 94 % de la production.

   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1,on accepte que l'objectif a été atteint .

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de $p(T \geqslant 30) = 0{,}913$.

   On a par ailleurs : $p(T \leqslant 30) = \int_0^{30} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx = [-\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^{30} = 1 - \mathrm{e}^{-30\lambda}$.

   On en déduit : $p(T \geqslant 30) = 1 - p(T \leqslant 30) = \mathrm{e}^{-30\lambda}$ et finalement :

   $e^{-30\lambda} = 0{,}913 \Leftrightarrow -30\lambda = \ln(0.913) \Leftrightarrow \lambda = 0{,}003$.

   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.

2. Calculons $p_{T \geqslant 60}(T \geqslant 90)$.

   On a $p_{T \geqslant 60}(T \geqslant 90) = \dfrac{p((T \geqslant 60) \cap (T \geqslant 90))}{p(T \geqslant 60)} = \dfrac{p(T \geqslant 90)}{p(T \geqslant 60})) = \dfrac{1 - p(T \leqslant 90)}{1 - p(T \leqslant 90)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-90\lambda}}{\mathrm{e}^{-60\lambda}} = \mathrm{e}^{-30\lambda}$.

   Avec $\lambda = 0{,}003.$, on a donc $p_{T \geqslant 60}(T \geqslant 90) = p(T \geqslant 30) = 0{,}913$

   La probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours est 0,913 (loi à durée de vie sans vieillissement !)

3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. Calculons la durée maximale t_{max} pour laquelle la probabilité que la balance dérègle est inférieure à 0,5.

   $p(T \leqslant t_{\text{max}}) \leqslant 0{,}5 \iff = \int_0^{t_{\text{max}}} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx \leqslant 0{,}5 \iff [-\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^{t_{\text{max}}} \leqslant 0{,}5 \iff 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t_{\text{max}}} \leqslant 0{,}5$

   $1 - \mathrm{e}^{-\lambda t_{\text{max}}} \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda t_{\text{max}}} \geqslant 0{,}5 \Leftrightarrow -\lambda t_{max} \geqslant \ln 0.5$

   Avec $\lambda = 0{,}003$, on trouve $t_{\text{max}} = 231$. Le vendeur avait donc tort.