Exercice 1 En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.

Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2. **a)** Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

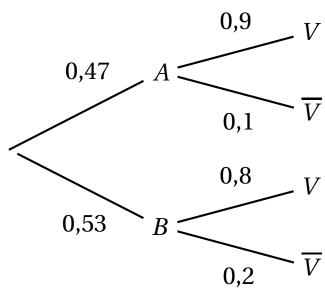
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est $0,529$.

4. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est $0,4$.

L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.

Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

1. Arbre de probabilités :



En bleu les données de l'énoncé, les autres valeurs étant obtenues par complément à 1.

2. **a)** D'après la formule des probabilités totales :

$p(V) = p(A \cap V) + p(B \cap V) = p(A) \times p_A(V) + p(B) \times p_B(V) = 0,47 \times 0,9 + 0,53 \times 0,8 = 0,423 + 0,424 = 0,847$.

b) $p_V(A) = \dfrac{p(A \cap V)}{p(V)} = \dfrac{0,423}{0,847} \approx 0,4994$ à 10^{-4} près.

3. Soit E l'évènement « laperont vote effectivement pour le candidat A ».

$E = (A \cap V) \cup \left(B \cap \overline{V}\right)$ (évènements disjoints), donc :

$p(E) = p(A \cap V) + p\left(B \cap \overline{V}\right) = 0,47 \times 0,9 + 0,53 \times 0,2 = 0,423 + 0,106 = 0,529$.

4. Lors du sondage téléphonique il y a eu 10 contacts par demi-heure, soit 20 contacts par heure.

La probabilité que la personne appelée accepte de répondre est $p = 0,4$.

Soit n le nombre de personnes contactées par téléphone ; soit elle accepte de répondre avec une probabilité de 0,4,soit elle ne l'accepte pas.

On suppose que chaque personne répond indépendamment des autres.

Il s'agit d'un schéma de Bernoulli dont les paramètres sont $\mathscr{B}(n\,;\,0,4)$.

Obtenir un échantillon de 1 200 personnes qui acceptent de répondre, c'est considérer que l'espérance mathématique est $\mathrm{E}(X) = 1200$. On cherche alors n tel que :

$\mathrm{E}(X) = n \times 0,4 = 1200$, soit $n = 3000$.

Avec 3 000 personnes contactées, on peut espérer que 1 200 acceptent de répondre.

Le temps moyen nécessaire est donc de $t = \dfrac{3000}{20} = 150$ heures.

Exercice 2 Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.
Un joueur doit tirer au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.
Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.
Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.
Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 €,
- sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 euros,
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».
On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».
On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Quelques calculs.

a) Calculer les probabilités $P(\text{V})$ et $P(\text{J})$ des évènements respectifs V et J.

b) On note $P_{\text{V}}(\text{R})$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $P_{\text{V}}(\text{R})$ puis $P(\text{R} \cap \text{V})$.

c) Calculer $P(\text{R})$.

d) Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.

2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est- à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.

a) Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c) Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $\text{E}(X) = \frac{140 - 51m}{80}$.

d) L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

3. Un joueur se présente et décide de jouer 5 fois, quelque soit les résultats obtenus. . On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de fois où le joueur gagne.

a) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

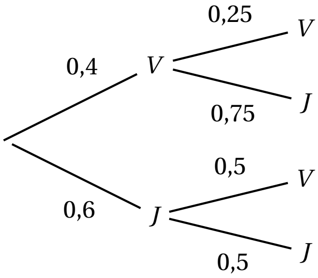
b) Donner les valeurs possibles de Y.

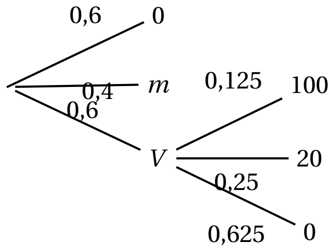
c) Dresser la loi de probabilité de Y sous forme de tableau.

d) Donner l'espérance de Y et interpréter le résultat.

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geqslant 1$. Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

Arbre de probabilités :





1. Quelques calculs.

a) $P(V) = 0.4 \times 0.25 = 0.1$ et $P(J) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$.

b) On note $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{R})$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $P_{\mathrm{V}}(R) = \frac{5}{8}$ puis $P(\mathrm{R} \cap \mathrm{V}) = 0.1 \times \frac{5}{8} = \frac{1}{16}$.

c) $P(R) = \frac{3}{10} + \frac{1}{16}$.

d) $P(100E) = \frac{1}{80}$ et $P(20\,E) = \frac{1}{40}$.

2. **a)** $X = \{-m; 0; 20 - m; 100 - m\}$.

b) $p(X = -m) = \frac{6}{10}, p(X = 0) = \frac{29}{80}, p(X = 20 - m) = \frac{1}{40}$ et $p(X = 100 - m) = \frac{1}{80}$

c) $E(X) = -m \times p(X = -m) + 0 \times p(X = 0) + (20 - m) \times p(X = 20 - m) + (100 - m) \times p(X = 100 - m) = \frac{140 - 51m}{80}$.

d) On cherche m tel que $E(X) < 0$. En effet X désignant le gain du joueur, il faut que son gain moyen (son espérance) soit négative.On trouve alors la solution en résolvant l'inéquation $140 - 51m < 0$ et on trouve $m \geq 3$.

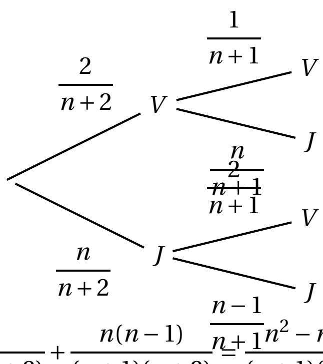
3. **a)** Y est la variable qui compte le nombre de succès obtenus dans la répétition de 5 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes. Donc Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{3}{80}$

b) $Y = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

c) À la calculatrice, on remarque qu'au delà de $k \geq 3$, $p(Y = k) \approx 0$: $p(Y = 0) \approx 0.826, p(Y = 1) \approx 0.1609, \ldots$

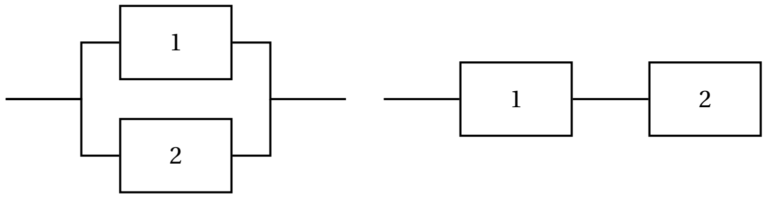
d) Pour une loi binomiale le calcul de l'espérance est direct : $E(Y) = n \times p = 5 \times \frac{3}{80} = \frac{15}{80} \approx 0.1875$

4. L'arbre devient alors :



puis $p(G) = p(V) + p(J) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 - n + 2}{(n+1)(n+2)}$. DOnc la condition $p(G) \geq \frac{1}{2}$ se traduit par l'inéquation $\frac{n^2 - n + 2}{(n+1)(n+2)} \geq \frac{1}{2}$ puis par l'inéquation après simplification, $n^2 - 5n + 2 \geq 0$. Après traitements (calcul du discriminant, calcul des racines et interprétation), la condition est vérifiée dès que $n \geq 5$.

Exercice 3 Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = (D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

1. Les évènements D_1 et D_2 sont indépendants, donc :
   $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) = 0,39 \times 0,39 = 0,1521$.
2. Ici la probabilité est égale à :
   $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0,39 + 0,39 - 0,1521 = 0,6279$.

Exercice 4 Arthur possède une poche de 2100 billes.Il y en a de plusieurs couleurs, transparentes ou non. Il y a précisément 140 billes rouges et 30 billes transparentes.
On tire au hasard dans le sac ;on appelle R l'événement « la bille est rouge » et T , « la bille est transparente ».
Combien de boules rouges doivent être transparentes pour que les événements R et T soient indépendants ?

On a : $p(R) = \dfrac{140}{2100}$. Soit n le nombre de billes rouges et transparentes, alors $p_T(R) = \dfrac{n}{30}$. L'indépendance des événements T et R se traduit aussi par l'égalité $p(R) = p_T(R)$ soit $\dfrac{140}{2100} = \dfrac{n}{30}$ qui donne $n = \dfrac{30 \times 140}{2100} = \dfrac{42}{21} = 2$. Il faut donc 2 billes rouges et transparentes.