Une compagnie aérienne possède des A340 (longs courriers) d'une capacité de 300 places. Cette compagnie a vendu n billets pour le vol 2012.
La probabilité pour qu'un acheteur se présente à l'embarquement est p et les comportements des acheteurs sont indépendants les uns des autres.
On note X_n la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement.
La compagnie cherche à optimiser le remplissage de l'avion en vendant éventuellement plus de places que la capacité totale de l'avion (surréservation ou surbooking) soit ici $n > 300$. Comme il y a évidemment un risque que le nombre de passagers munis d'un billet se présentant à l'embarquement excède 300, la compagnie veut maîtriser ce risque.

1. Quelle loi suit la variable X_n ?
   X_n suit la loi binomiale de paramètre n et p.

2. On suppose que $0,5 < p < 0,95$. Écrire l'intervalle de fluctuation asymptotique I_n de $\dfrac{X_n}{n}$ au seuil de 0,95.
   Comme $n > 300$ et $0,5 < p < 0,95$ on a $np > 5$ et $n(1-p) \geq 5$,on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 :
   $$I_n =]p - 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}[$$

3. Montrer que si $I_n \subset [0; \frac{300}{n}]$ alors la probabilité que le nombre de passagers se présentant à l'embarquement excède 300 est proche de 0,05.
   Si $I_n \subset [0; \frac{300}{n}]$ alors $P(X_n > 300) \leq P(\frac{X_n}{n} \notin I_n)$. Comme $P(\frac{X_n}{n} \notin I_n) \approx 0.05$ on conclut que $P(X_n > 300) \leq 0.05$

4. On cherche à déterminer la valeur de n maximale permettant de satisfaire la condition de l'inclusion $I_n \subset [0; \frac{300}{n}]$.

   (a) Montrer que $I_n \subset [0; \frac{300}{n}] \Rightarrow pn + 1.96\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)} - 300 \leq 0$
   $I_n \subset [0; \frac{300}{n}] \Rightarrow p + 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{300}{n} \Rightarrow pn + 1.96\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)} - 300 \leq 0$

   (b) On pose $f(x) = px + 1.96\sqrt{x}\sqrt{p(1-p)} - 300$. Montrer qu'il existe un unique entier n_0 tel que si $n \leq n_0$ alors $f(n) > 0$ et si $n \geq n_0$ alors $f(n) < 0$.
   On pose $x = \sqrt{n}$ et on se ramène à l'étude du signe d'un polynôme du seconde degré. Alors $f(x) \leq 0$ si $x \in [300; x_0]$ avec $x_0 = \dfrac{-1.96\sqrt{p(1-p)} + \sqrt{1200p + 1.96^2 p(1-p)}}{2p}$.
   L'entier n_0 est la partie entière de x_0.

   (c) Déterminer à la calculatrice les valeurs de n_0 pour $p = 0,85; p = 0,9; p = 0,95$.
   Pour $p = 0,85$ on trouve $n_0 = 337$,pour $p = 0,9$ on trouve $n_0 = 321$ et pour $p = 0,95$ on trouve $n_0 = 307$.