Exercice 1 Partie A

Une entreprise fabrique des jouets qu'elle vend par lots. Elle peut fabriquer jusqu'à 14 lots par jour et, lorsqu'elle fabrique et vend x lots, le coût de fabrication journalier correspondant est donné, en centaine d'euros, par :

$$C(x) = 0,2x^3 - 3,6x^2 + 21,6x - 30,$$

x appartenant à l'intervalle $[2\,;\,14]$.
De plus, le prix de vente d'un lot dépend du nombre x de lots vendus et il est exprimé, en centaine d'euros, par :

$$P(x) = 7,2 - 0,3x.$$

1. Montrer que le montant de la recette journalière correspondant à la vente de x lots est donné, en centaine d'euros, par :

$$R(x) = 7,2x - 0,3x^2.$$

Le prix de vente n'est pas fixe et dépend de la production x de lots vendus. Cette dépendance est définie par la fonction P précédente. En tout cas, la recette est toujours le produit du prix de vente par le nombre de lots vendus, soit $R(x) = P(x) \times x = (7,2 - 0,3x)x = 7,2x - 0,3x^2$.

2. Le graphique, représenté en annexe, décrit le montant des recettes journalières R et le coût de production C en fonction du nombre de lots x fabriqués et vendus par jour. On utilisera ce graphique pour répondre aux question **2.a., 2.b.** et **2.c.** suivantes :

a. Reproduire et compléter le tableau suivant. (Les résultats seront donnés en nombres entiers)

x	3	5	10	12	14
Coût de production (en centaine d'euros)	7.8	13	26	56.4	115.6
Recette journalière (en centaine d'euros)	18.9	28.5	42	43.2	42
Bénéfice journalier (en centaine d'euros)	11.1	15.5	16	-13.2	-73.6

Le tableau recense les valeurs exactes ,calculées avec le tableur de la calculatrice.Les valeurs graphiques sont plus simples à évaluer.

b. Combien doit-on produire de lots pour que l'entreprise réalise un bénéfice chaque jour ? Justifier.
Il faut pour cela une production pour laquelle la recette R est supérieure au coût C ; graphiquement, cela revient à déterminer les abscisses des points pour lesquelles la courbe R est au-dessus de la courbe C soit pour $2 \leq x \leq 11.25$

c. Pour quel nombre de lots le bénéfice vous paraît-il maximum ? Justifier.
Le bénéfice est l'écart entre la recette et le coût. Graphiquement cet écart semble maximum pour $x = 8$

Partie B

On souhaite déterminer exactement le nombre de lots pour lequel le bénéfice est maximum. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[2\,;\,11]$ on pose :

$$B(x) = R(x) - C(x) = -0,2x^3 + 3,3x^2 - 14,4x + 30.$$

1. Calculer $B'(x)$ où B'désigne la dérivée de la fonction B.
B est un polynôme du troisième degré.On a alors :
$B'(x) = -0,2 \times 3x^2 + 3,3 \times 2x - 14,4 = -0,6x^2 + 6,6x - 14,4$

2. Déterminer le signe de $B'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[2\,;\,11]$. Dresser le tableau de variations de la fonction B sur cet intervalle.
$B'(x)$ *est un polynôme du second degré. Pour déterminer son signe on utilise* Δ. *On a :* $\Delta = 6,6^2 - 4 \times (-0,6) \times (-14,4) = 9$. *Donc* B' *change de signe autour de ses deux racines :*

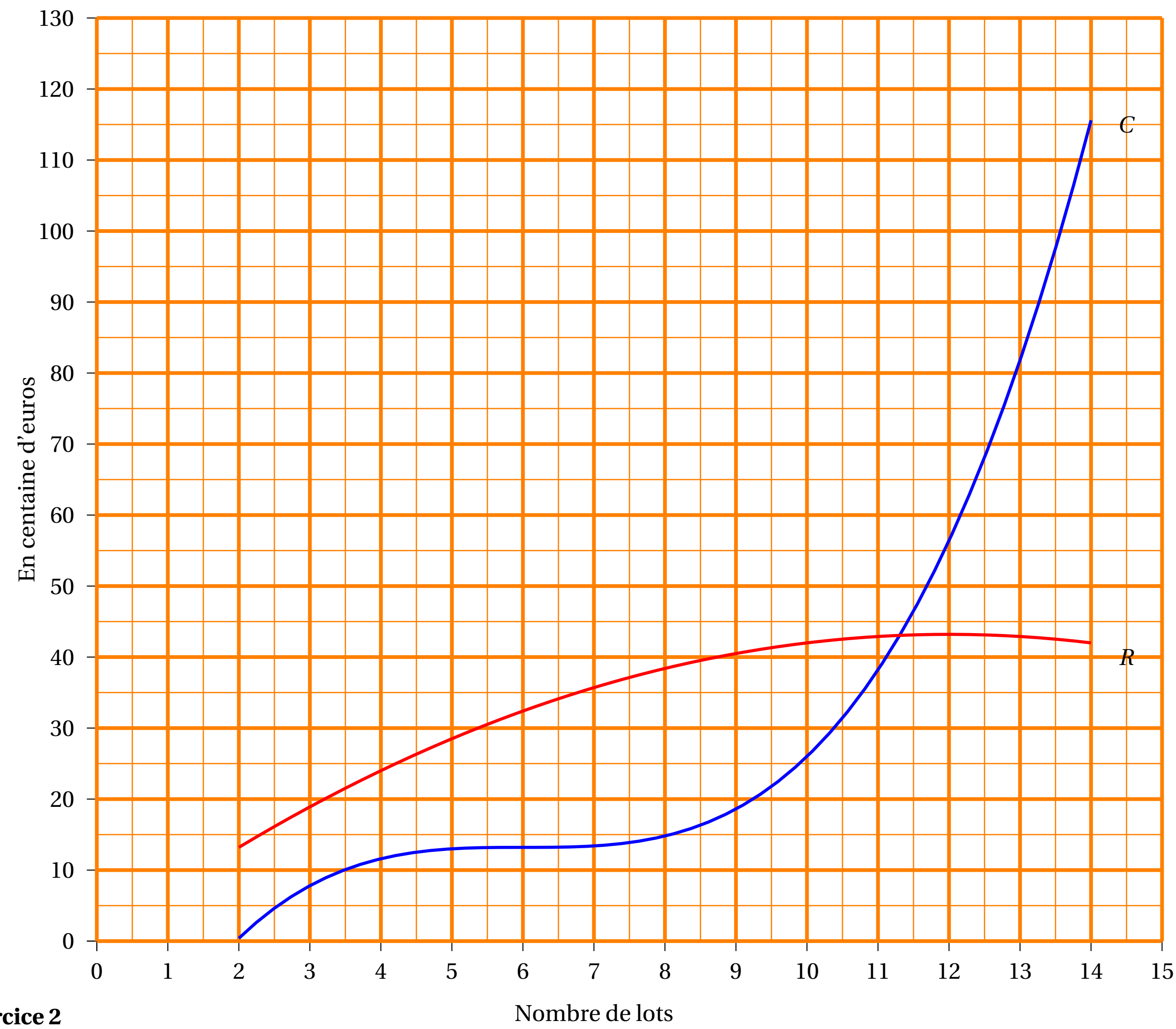
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 8$$

On a donc successivement le signe de B' *sur* $[2\,;\,11]$ *puis les variations de* B.

x	2		3		8		11
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$	12.8	↘	11.1	↗	23.6	↘	4.7

3. En déduire quel doit être le nombre de lots fabriqués et vendus pour que le bénéfice journalier soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal ? *D'après le tableau de variations précédent, le bénéfice est maximum lorsque 8 lots sont vendus ; il vaut alors 23.6 centaines d'euros soit 2360 €*

ANNEXE



Exercice 2

1. Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[1\,;\,20]$ par

$$f(x) = \frac{x}{4} + 1 + \frac{4}{x}.$$

On note f' la dérivée de f' ; vérifier que $f'(x) = \dfrac{(x-4)(x+4)}{4x^2}$.

En déduire le tableau de variations de f.

Il s'agit ici d'une fonction rationnelle. Alors que la dérivée de x^3 est $3x^2$, celle de x^2 est $2x$, celle de $\dfrac{1}{x}$ est $-\dfrac{1}{x^2}$. Ainsi :

$f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2-16}{4x^2}$ *en réduisant au même dénominateur. On vérifie aisément que pour tout x que $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$.*

Donc pour tout x, $f'(x) = \dfrac{(x-4)(x+4)}{4x^2}$. Or pour x dans $[1\,;\,20]$, seule l'expression $x-4$ change de signe , les autres restant positives. Donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $x-4$. D'où le tableau suivant :

x	1		4		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5,25	$\searrow$	3	$\nearrow$	6,02

2. Le coût de production, exprimé en million d'euro, pour fabriquer q milliers de tonnes de produit A est donné par

$$C(q) = 4 + q + \frac{q^2}{4}.$$

Pour que l'entreprise existe, la production ne peut être inférieure à un millier de tonnes de produit A et ne peut être supérieure à 20 milliers de tonnes.

a. Déterminer $U(q)$ le coût unitaire de production d'un millier de tonnes de produit A, lorsque la production est de q milliers de tonnes.
Le coût unitaire est le coût moyen, c'est-à-dire le coût pour un millier de tonnes quand on a produit q . Donc $U(q) = \dfrac{C(q)}{q} = \dfrac{4+q+\dfrac{q^2}{4}}{q} = \dfrac{4}{q}+1+\dfrac{q}{4}$.

b. L'entreprise décide de choisir le niveau de production qui minimisera son coût unitaire.En utilisant la question **1** , déterminer cette production.
On constate que pour tout q, $U(q) = f(q)$*. Donc les variations de f permettent d'affirmer que le coût unitaire est minimum pour* 4 *milliers de tonnes.*

Exercice 3 Pour financer un échange scolaire, les 32 élèves dune classe de seconde veulent vendre des nougats et des chocolats. Par souci d'économie, ils décident de commander les nougats et les chocolats en vrac chez un chocolatier, puis de faire eux-mêmes les emballages en achetant des petites boîtes en carton.

Les prix du chocolatier sont donnés par les deux courbes de l'annexe de l'exercice 2. La courbe $\mathcal{N}$ représente la fonction f, définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[10\,;\,100]$, qui donne le prix d'achat en euros de x kilogrammes de nougats. La courbe $\mathcal{C}$ représente la fonction g, définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[10\,;\,100]$, qui donne le prix d'achat, en euros, de x kilogrammes de chocolats.

1. a. Déterminer graphiquement le prix, en euros, de 40 kilogrammes de nougats en faisant apparaître tous les tracés utiles sur l'annexe de l'exercice 2 qui sera à rendre avec la copie.
Voir les traits de construction

Sachant que le prix des nougats est proportionnel à la quantité achetée, en déduire que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[10\,;\,100]$, la fonction f est définie par $f(x) = 35x$.
Pour 10 kg le prix est de 350 €. Puisqu'il y a proportionnalité entre le prix p en euro et la quantité q en kg on a $p = 35q$ *soit avec les notations imposées de l'exercice,* $f(x) = 35x$

b. La fonction g est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[10\,;\,100]$ par $g(x) = -0,2x^2+50x+80$. Calculer le prix, en euros, d'une commande de 40 kilogrammes de nougats et de 100 kilogrammes de chocolats.
Le prix total de la commande est : $f(40)+g(100) = 40\times 35+(-0.2\times 100^2+50\times 100+80) = 1400+3080 = 4480$

c. Déterminer, à l'aide du graphique, le montant, en euros, d'une commande de 80 kilogrammes de nougats et de 80 kilogrammes de chocolats. Ce résultat devra être justifié par un tracé en pointillé sur l'annexe de l'exercice 2. Retrouver le résultat par le calcul.
Le coût de 80 kg de chocolats ou de nougats est le même, égal à 2800 €, soit un coût total de 5600 €.
Par le calcul, il s'agit de trouver $f(80)+g(80) = 80\times 35+(-0.2\times 80^2+50\times 80+80) = 5600$

2. a. Quel est le prix moyen, en euros, d'un kilogramme de chocolats pour une commande de 50 kilogrammes.
50 kg de chocolats coûtent 2080 € ? En divisant ce coût on trouve le coût moyen pour un kilo, soit 41,6 €par kg.

b. Montrer que le prix moyen, en euros, d'un kilogramme de chocolats pour une commande de x kilogrammes est donné par la fonction h définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[10\,;\,100]$, par

$$h(x) = -0,2x+50+\frac{80}{x}.$$

Le coût moyen est donné par la formule $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ *où* $C(x)$ *désigne le coût total de production de x kilogrammes de chocolats, c'est-à-dire,* $g(x)$*. En divisant tous les termes de la fonction g par x, on trouve le résultat demandé*

c. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[10\,;\,100]$, calculer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[10\,;\,100]$, $h'(x)$ est strictement négatif.
$h'(x) = -0.2-\dfrac{80}{x^2} = -(0.2+\dfrac{80}{x^2})$ *Donc quelque soit le nombre x,* $h'(x) < 0$.

d. Dresser le tableau de variations de h sur l'intervalle $[10\,;\,100]$. Que peut-on en déduire quant au prix moyen du kilogramme de chocolats en fonction de la quantité achetée ?

x	10		100
	58		
$f(x)$		$\searrow$	
			30,8

Donc le prix moyen du kilogramme diminue quand la quantité augmente.

Prix des nougats et des chocolats, en euro, en fonction de la quantité x, en kilogramme, commandés