Exercice 1 ✯ Simplifier lorsque c'est possible les expressions suivantes :

1. $e^x \times e^{-2x} = e^{-x}$
2. $e^{-2x+1} \times e^{x-1} = e^{-x}$
3. $e^x + e^{-x}$ impossible car c'est une somme d'exponentielle et non un produit...
4. $\dfrac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$
5. $\dfrac{x \times e^x}{e^{2x}} = xe^{-x}$
6. $(e^x)^2 = e^{2x}$
7. $xe^x - 2e^x = (x-2)e^x$(factorisation par e^x)
8. $2e^{-x} + (2x-5)e^{-x} = (2x-3)e^{-x}$(factorisation par e^{-x})
9. $2xe^x - (x^2+3)e^x = (-x^2+2x-3)e^x$(factorisation par e^x) Attention car le « - » devant la parenthèse est distributif dans x^2+3...

Exercice 2 ✯ Déterminer la dérivée f' puis la dérivée seconde f'' des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = e^x - x + 1$; $f'(x) = e^x - 1$ et $f''(x) = e^x$
2. $f(x) = (x-1)e^x$;$f'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = (1+x-1)e^x = xe^x$ et $f''(x) = 1 \times e^x + xe^x = (x+1)e^x$
3. $f(x) = (1+3x)e^x$;$f'(x) = 3 \times e^x + (1+3x)e^x = (3x+4)e^x$ et $f''(x) = 3e^x + (3x+4) \times e^x = (3x+7)e^x$
4. $f(x) = 3xe^x$; $f'(x) = 3e^x + 3xe^x = (3+3x)e^x$ et $f''(x) = 3e^x + (3+3x)e^x = (3x+6)e^x$

Exercice 3 ✯✯ Déterminer la dérivée f' de f :

1. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$; $f'(x) = \dfrac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{(1-x)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{1-x}{e^x}$
2. $f(x) = \dfrac{1-x}{e^x}$;$f'(x) = \dfrac{-1 \times e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{(x-2)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{x-2}{e^x}$

marc.turro@ac-bordeaux.fr

Exercice 4 ✭ On considère la fonction f définie pour tout x dans $I = [-2; 5]$ par :

$$f(x) = e^x - x + 2$$

1. On a pour tout x dans I, $f'(x) = e^x - 1$. Or $e^x > 1$ dès que $x > 0$ car $e^0 = 1$ et la fonction f est croissante sur I.
2. Le tableau ci-dessous donne le signe de f' et les variations de f :

x	-2		0		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$4 + e^{-2}$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$e^5 - 3$

3. Au regard du tableau de variations, on en déduit que f admet un minimum en $x = 0$ qui vaut $f(0) = 3$.
4. (a) On a $f''(x) = e^x$ et pour tout x, $e^x > 0$. Donc la dérivée seconde f'' de f est positive sur I.
   (b) La dérivée seconde f'' étant positive sur I, on en déduit que f est convexe sur I.

Exercice 5 ✭✭ On considère la fonction définie pour tout x dans l'intervalle $I = [-3; 3]$ par :

$$f(x) = (3x - 1)e^x$$

1. f est le produit de $u = 3x-1$ avec $u' = 3$ et $v = e^x$ avec $v' = e^x$. D'où : $f'(x) = 3\times e^x + (3x-1)\times e^x = (3x+2)e^x$ en factorisant par e^x.
   Pour étudier le signe de f' un tableau de signe s'impose :

x	-3		$-\dfrac{2}{3}$		3
$3x + 2$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

2. Connaissant le signe de f', on en déduit les variations de f :

x	-3		$-\frac{2}{3}$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-10e^{-3}$	$\searrow$	$-3e^{-\frac{2}{3}}$	$\nearrow$	$8e^3$

3. (a) De la même façon, $f''(x) = 3e^x + (3x+2)e^x = (3x+4)e^x$. Étudions son signe : $f''(x)$ est le produit de $3x+4$ par e^x, qui est toujours strictement positif. Donc f'' a le même signe que $3x+4$ (c'est-à-dire que f'' est négative lorsque $3x+4$ l'est et positive lorsque $3x+4$ l'est...). D'où le tableau ci-dessous :

x	-3		$-\frac{4}{3}$		3
$3x+4$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

(b) L'étude précédente permet de conclure :

- f est convexe pour les valeurs de x pour lesquelles $f''(x) > 0$ c'est-à-dire sur l'intervalle $[-\frac{4}{3}; 3]$;
- f est concave pour les valeurs de x pour lesquelles $f''(x) < 0$ c'est-à-dire sur l'intervalle $[-3; -\frac{4}{3}]$;
- f changeant de convexité, elle admet donc un point d'inflexion I d'abscisse $x = -\frac{4}{3}$.