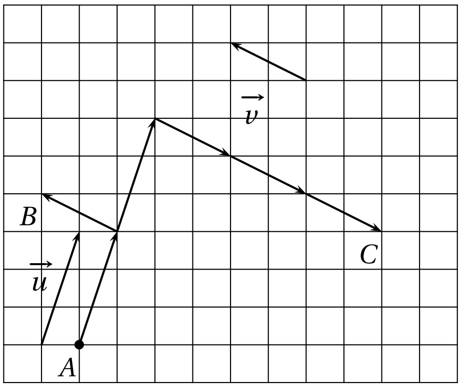
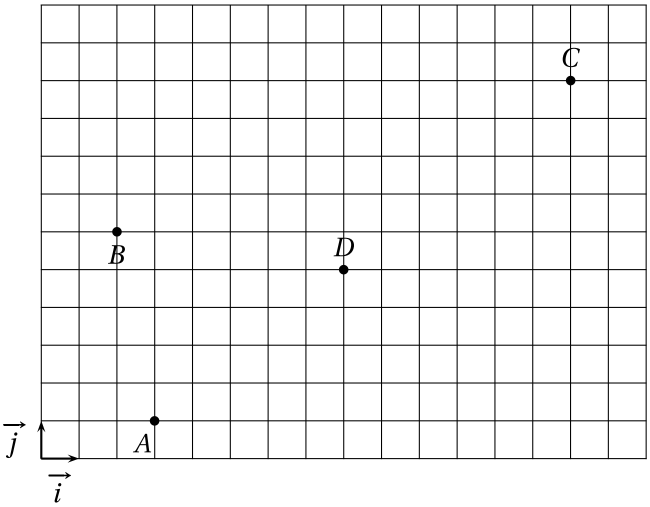
Exercice 1 On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous :



1. Voir graphique
2. Voir graphique
3. D'après la relation de Chasles :
   $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{u} - 3\vec{v}\ \vec{u} - 4\vec{v}$.

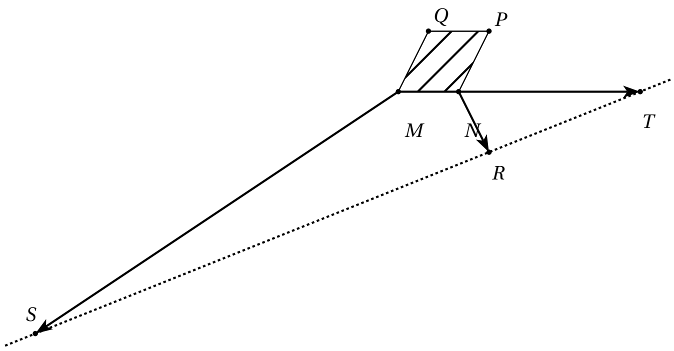
Exercice 2 On donne une base $(\vec{i}\ ;\vec{j})$ de vecteurs. Exprimez les vecteurs suivants dans cette base :



1. $\overrightarrow{AB} = -\vec{i} + 5\vec{j}$
2. $\overrightarrow{AC} = 11\vec{i} + 9\vec{j}$
3. $\overrightarrow{BA} = \vec{i} - 5\vec{j}$
4. $\overrightarrow{BC} = 12\vec{i} + 4\vec{j}$
5. $\overrightarrow{AD} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$
6. $\overrightarrow{CD} = -6\vec{i} - 5\vec{j}$

Exercice 3 On considère un parallélogramme $MNPQ$.

1. Construire :



2. $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TM} + \overrightarrow{MS} = -4\overrightarrow{MN} + 4\overrightarrow{PM} = -4\overrightarrow{QP} + 4(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QM}) = -8\overrightarrow{QP} + 4\overrightarrow{QM}$.
3. $\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{TN} + \overrightarrow{NR} = -3\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QN} = -3\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PN} = -3\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QM} = 2\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QM}$.
4. Des questions précédentes, on remarque que $\overrightarrow{TS} = 4\overrightarrow{TR}$. Donc ces vecteurs sont colinéaires.Nous aurions pu de même effectuer le produit en croix des coordonnées de ces deux vecteurs exprimées dans la base $(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QM})$ pour démontrer la colinéarité.
5. Les points T, S et R sont donc alignés.

Exercice 4 ABC est un triangle quelconque. On définit les points M, N et P par les relations :
L'idée générale est de choisir une base, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ par exemple et d'exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$, par exemple, en

fonction des vecteurs de bases.On a alors, avec la relation de Chasles et les relations données dans l'exercice :

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\ ;$$
$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Ainsi les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont dans la base $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$:

$$\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}\text{ et }\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Le produit en croix de ces coordonnées est nul, ce qui démontre la proportionnalité de ces coordonnées. En d'autres termes, les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires et les points M, N et P sont alignés.

On appelle A' le milieu de $[BC]$. Alors :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA'}\ \text{car}\ \overrightarrow{A'B}=-\overrightarrow{A'C}.$$

Or G est le centre de gravité du triangle donc :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\ \text{soit ce qui revient au même :}\ \overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GA'}$$

D'où :$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$
Dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, on a :

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\ \text{d'une part et}\ \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\ \text{d'autre part.}$$

Donc cette décomposition montre que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
Les vecteurs sont donc colinéaires et les points A, E et D alignés.

Exercice 5 On considère un triangle ABC quelconque. On appelle O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, A' le milieu du segment $[BC]$,B' le milieu du segment $[AC]$ et C' le milieu du segment $[AB]$.

1. On considère le point H défini par la relation : $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.(1)
   (a) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'C}=2\times\overrightarrow{OA'}$ car A' est le milieu de $[BC]$.
   (b) On a :
   $$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$
   $$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA'}$$
   $$\text{donc}\ \overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$$
   (c) La relation précédente prouve la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ donc le parallélisme des droites (AH) et (OA'). Or (OA') est la médiatrice de $[BC]$, donc est perpendiculaire à $[BC]$. Donc (AH) est perpendiculaire à (BC).
   (d) En utilisant les milieux B' et C' des segments $[AC]$ et $[AB]$ et en adaptant les questions précédentes, on arrive aux conclusions souhaitées.
   (e) On remarque que le point H appartient aux trois hauteurs du triangle ; ce point étant unique,H est l'orthocentre de ce triangle.
2. On appelle G le centre de gravité du triangle ABC.

(a) Voir exercice précédent

(b) Avec la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0} \text{ d'où } 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

(c) On a d'une part $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et d'autre part $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. D'où par transitivité : $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$

(d) La colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$ permet de conclure sur l'alignement des points O, H et G.

La droite qui passe par les points O, H et G est appelée droite d'EULER du triangle.