Exercice 1 À l'aide de la définition, montrer que :

1. la fonction $f(x) = x^2 - x$ est dérivable en 0 et que $f'(0) = -1$

$\tau = \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{h^2 - h - 0}{h} = h - 1$. Donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau = -1$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$.

2. la fonction $f(x) = \dfrac{2}{x}$ est dérivable en 2 et que $f'(2) = -\dfrac{1}{2}$.

$\tau = \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{\dfrac{2}{2+h} - 1}{h} = \dfrac{\dfrac{2-(2+h)}{2+h}}{h} = \dfrac{\dfrac{-h}{2+h}}{h} = -\dfrac{1}{2+h}$. Donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau = -\dfrac{1}{2}$. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = -\dfrac{1}{2}$.

3. la fonction affine $f(x) = mx + p$ est dérivable en a et que $f'(a) = m$, quelque soit le nombre a.

$\tau = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{m(a+h) + p - (ma+p)}{h} = \dfrac{ma + mh + p - ma - p}{h} = \dfrac{mh}{h} = m$.Donc f est dérivable en a, quelque soit a et $f'(a) = m$.

4. la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = 2ax_0 + b$, quelque soit le nombre x_0.

$\tau = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{a(x_0+h)^2 + b(x_0+h) + c - ax_0^2 - bx_0 - c}{h} = \dfrac{2ax_0h + ah^2 + bh}{h} = 2ax_0 + ah + b$. Donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau = 2ax_0 + b$. Donc f est dérivable en x_0, quelque soit x_0 et $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

5. la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ pour tout réel $x \neq 2$ est dérivable en 1 et que $f'(1) = -1$.

$\tau = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{1+h-2} - \dfrac{1}{1-2}}{h} = \dfrac{\dfrac{1+h-1}{h-1}}{h} = \dfrac{1}{h-1}$. Donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau = -1$ et f est dérivable en 1 et $f'(1) = -1$

6. la fonction f définie par $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = 3x^2$.

$\tau = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \dfrac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$.Donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau = 3x^2$ et f est dérivable en x et $f'(x) = 3x^2$

Exercice 2 Un véhicule décrit un mouvement rectiligne.La distance parcourue depuis le temps $t = 0$ est donnée par la fonction d définie par :

$$d(t) = t^2 + 5t$$

1. Déterminer $\tau = \dfrac{d(h) - d(0)}{h}$ pour tout $h > 0$.

$$\boxed{\tau = \frac{h^2 + 5h - 0}{h} = h + 5}$$

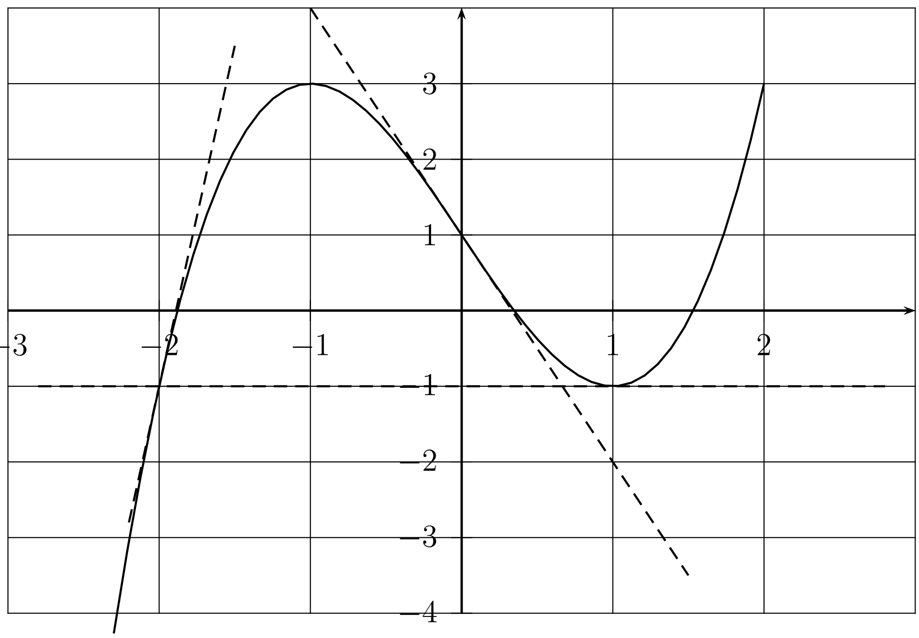
2. En déduire la vitesse instantanée à $t = 0$.

La vitesse instantanée en $t = 0$ est la vitesse moyenne entre les instants $t = 0$ et $t = 0 + h$ lorsque h tend vers 0. D'après la question précédente $\lim\limits_{h \to 0} \tau = 5$.

3. De la même façon, quelle est la vitesse instantanée à $t = 5s$?

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \tau = f'(5) = 15}$$

Exercice 3



Ci-contre la courbe représentative d'une fonction h. Les droites tracées sont les tangentes à la courbe aux points d'abscisse $-2, 0$ et 1.

1. Déterminer graphiquement la valeur de $h(-2), h(0)$ et $h(1)$.
   $h(-2) = -1, h(0) = 1$ *et* $h(1) = -1$
2. Déterminer graphiquement la valeur de $h'(-2), h'(0)$ et $h'(1)$.
   $h'(-2) = 9, h'(0) = -3$ et $h'(1) = 0$

Exercice 4 Construire une courbe qui pourrait représenter la fonction f dont on connaît les résultats suivants :

x	-4	-2	0	1	3
$f(x)$	2	-1	-0.5	3	0
$f'(x)$	-1	0	2	0	0

Plusieurs possibilités. Mais à chaque fois la courbe passe par les points $A(-4;-2), B(-2;-1), C(0;-0.5), D(1;3)$ et $E(3;0)$; les nombres dérivés indiquent dans quel « sens »partir !

Exercice 5 Déterminer à l'aide des propriétés sur la dérivation, les dérivées f' des fonctions f ci-dessous :

1. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 5x + 4$ ($f'(x) = -12x^2 + 4x - 5$)
2. $f(x) = 3\sqrt{x}(1-x)$($f'(x) = \dfrac{3(1-3x)}{2\sqrt{x}}$)
3. $f(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{1-x}$($f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}(3-x)}{(1-x)^2}$)
4. $f(x) = \dfrac{3-4x}{2-6x}$($f'(x) = \dfrac{10}{(2-6x)^2}$)
5. $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1+x}$($f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(1+x)^2}$)

Exercice 6 On considère la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels à déterminer.On sait que $f(1) = 2$, $f'(0) = 1$ et $f'(1) = 2$.
En déduire les valeurs de a, b et c puis de la fonction f.

$f'(x) = 3ax^2 + b$; donc $f'(0) = 1$ entraîne $b = 1$ et $f'(1) = 2$ entraîne $a = \dfrac{1}{3}$. Enfin la relation $f(1) = 2$ donne finalement $c = \dfrac{2}{3}$

Exercice 7 On considère la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^2$.

1. Donnez la meilleure approximation affine de f au voisinage de 0.$(1+x)^2 \simeq 2x+1$ *pour des valeurs de x proche de 0.*
2. On souhaite augmenter une quantité de $t\%$.
   (a) Par quoi faut-il multiplier cette quantité pour l'augmenter de $t\%$?$1 + \dfrac{t}{100}$
   (b) Par quoi faut-il multiplier cette quantité pour l'augmenter deux fois de $t\%$?$(1 + \dfrac{t}{100})^2$
   (c) Augmenter deux fois de $t\%$ est-ce augmenter de $2 \times t\%$?*En général non !Mais pour de petites valeurs de pourcentages t faire deux augmentations successives de t% ou faire une augmentation de $2 \times t\%$, c'est presque pareil !*

Exercice 8 On considère la fonction f définie par $f(x) = -0.1x^2 + 3x - 10$ pour tout réel x.

1. Déterminer l'équation de la la tangente à la C_f au point d'abscisse $a = 10$;
   $y = x$
2. Existe t-il un point de la courbe où la tangente serait parallèle à la droite D d'équation $y = 15x - 1$? Si oui déterminer les coordonnées de ce point.
   On cherche a tel que $f'(a) = 15$; on trouve assez vite $a = -60$.

3. Déterminer l'équation des tangentes à C_f passant par le point $A(110;545)$.
   Le problème consiste à établir l'équation de la tangente en un point M d'abscisse a et de trouver une condition sur a pour que $A(110;545)$ appartienne à cette tangente. On écrit :
   $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ *donc* $y=(3-0.2a)(x-a)-0.1a^2+3a-10$. *Or A appartient à cette tangente si ses coordonnées vérifient cette égalité :*
   $y545=(3-0.2a)(110-a)-0.1a^2+3a-10$ *relation qui s'écrit encore* $-0.1a^2-22a-225=0$.
   En calculant le discriminant on prouve d'une part qu'il y a deux solutions aux problèmes et que ces solutions sont :
   $a_1=\dfrac{22-\sqrt{574}}{0.2}\simeq -9.8$ *et* $a_2=\dfrac{22+\sqrt{574}}{0.2}\simeq 229.8$

Exercice 9 On considère les paraboles P_1 et P_2 d'équations respectives :

$$y=x^2-6x+10 \text{ et } y=-x^2-4x-6$$

Démontrer que les paraboles P_1 et P_2 ont une tangente communes dont on donnera une équation.
Le problème est plus difficile ! Il s'agit de déterminer les équations des tangentes en a pour f et en b pour g (f et g étant les deux fonctions dont les courbes sont les deux paraboles). On trouve alors après calculs : $y=(2a-6)x-a^2+10$ et $y=-(2b+4)(x-b)+b^2-6$.
On souhaite que la tangente soit commune aux deux paraboles ; il faut donc : $\begin{cases} 2a-6 &= -(2b+4)\\ 10-a^2 &= b^2-6\end{cases}$
soit plus simplement :
$\begin{cases} a+b &= 1\\ a^2+b^2 &= 16\end{cases}$
On trouve alors les couples $(\dfrac{1-\sqrt{31}}{2};\dfrac{1+\sqrt{31}}{2})$ et $(\dfrac{1+\sqrt{31}}{2};\dfrac{1-\sqrt{31}}{2})$ qui permettent de construire les points $(a;f(a))$ et $(b;g(b))$ d'une part et les points $(b;f(b))$ et $(a;g(a))$ d'autre part.

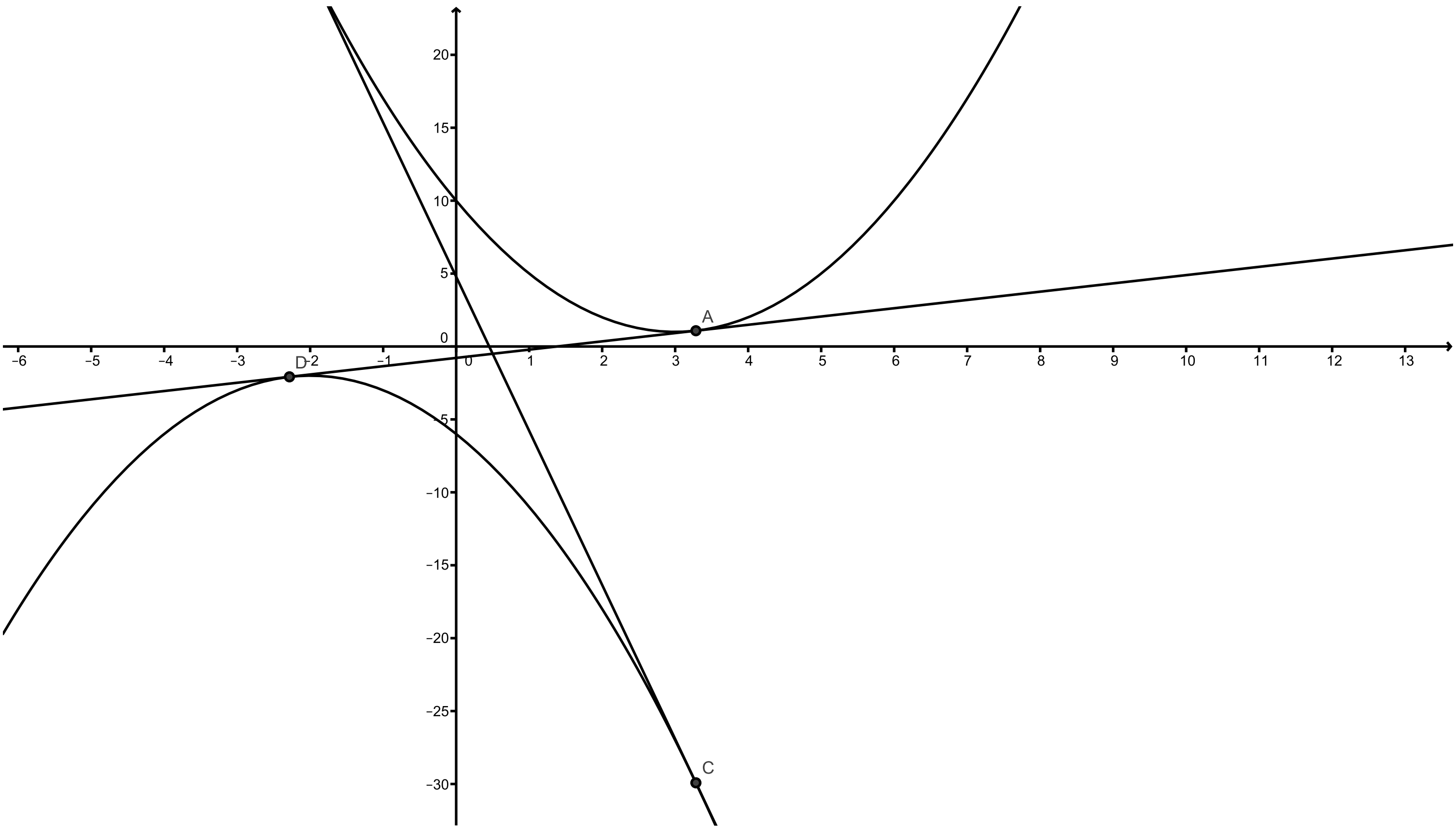


Figure 1 – Tangentes communes aux deux paraboles