Correction feuille d'exercices sur les suites.

Exercice n°1 : (U_n) est une suite arithmétique de raison r ; donc quelque soit les entiers n et p, on a $U_n = U_p + (n-p)\times r$. D'où :

(a) $U_{10} = U_0 + 10\times r = -11 + 60 = 49$ (b) $U_{26} = U_7 + (26-7)\times r = 14 + 19\times(-12) = -214$

(c) $U_{38} = U_{23} + (38-23)r$ donc $r = \dfrac{U_{38}-U_{23}}{38-23} = \dfrac{164-15}{15} = \dfrac{149}{15}$ d'où $r = \dfrac{149}{15}$

Exercice n°2 :

1°) $S = U_1 + U_2 + \dots + U_{20} = \dfrac{U_1 + U_{20}}{2}\times 20$ avec $U_1 = 1$ et $U_{20} = U_1 + 16\times 3 = 10 + 48 = 58$.

Donc $S = \dfrac{1+58}{2}\times 20 = 590$

2°) $S = 2+5+8+\dots+302$, on reconnaît les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $U_0 = 2$. Or $302 = 100\times 3 + 2$ donc $302 = U_{100}$.

Donc $S = \dfrac{2+302}{2}\times 101 = 152\times 101 = 15352$

3°) En regroupant judicieusement les différents termes : $D = -(1+2+3+\dots+21) = -\dfrac{(1+21)\times 22}{2}$

D'où $D = -242$

Exercice 3 : (V_n) est géométrique de raison q, donc : $\forall (p,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $V_n = V_p \times q^{n-p}$. Ainsi :

(a) $V_{10} = V_0 \times q^{10} = 5\times 0{,}3^{10} \simeq 3\times 10^{-5}$ (b) $V_{15} = V_6 \times q^9 \Leftrightarrow V_6 = \dfrac{8500}{2{,}4^9} \simeq 3{,}217494034\dots$

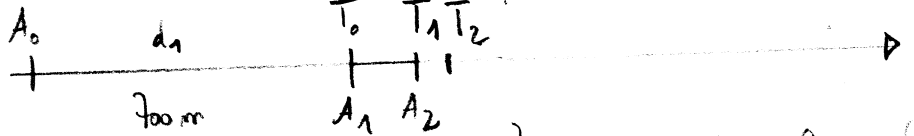
Exercice 4 :

1°) $S = 1+3+9+\dots+14348907$. Sachant que $14348907 = 3^{15}$, il s'agit alors d'effectuer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique. Donc :

$$S = 1\times\frac{1-3^{16}}{1-3} = \frac{3^{16}-1}{2} = 21523360$$

2°) $E(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°6 :



1°) Achille pour parcourir 700 m, a besoin de $t = \dfrac{700}{14} = 50$ secondes. Or pendant 50 s, la tortue effectue $d = 0{,}07\times 50 = 3{,}5$ mètres. Donc $d_2 = 3{,}5$.

2°) Pour parcourir d_n mètres, Achille a besoin de $t = \dfrac{d_n}{14}$ secondes. Or pendant $\dfrac{d_n}{14}$ secondes, la tortue effectue $d_{n+1} = 0{,}07\times\dfrac{d_n}{14}$ mètres. Donc $d_{n+1} = \dfrac{1}{200}d_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Donc (d_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{200}$ de premier terme $d_1 = 700$.

3°) $D_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n = 700 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{200}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{200}} = \dfrac{140000}{199} \times \left(1 - \left(\frac{1}{200}\right)^{n+1}\right)$

4°) Lorsque n est grand, $\left(\frac{1}{200}\right)^{n+1}$ devient quasi nul. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{200}\right)^{n+1} = 0.$$

On a donc : $\lim_{n \to +\infty} D_n = \dfrac{140000}{199}$ soit environ 703,518 mètres

La distance parcourue par Achille n'est donc pas infini, comme le prévoyait Zénon !