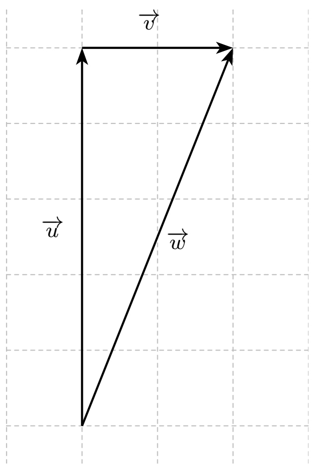
Mathématiques en Terminale S
Produit scalaire dans l'espace

Table des matières

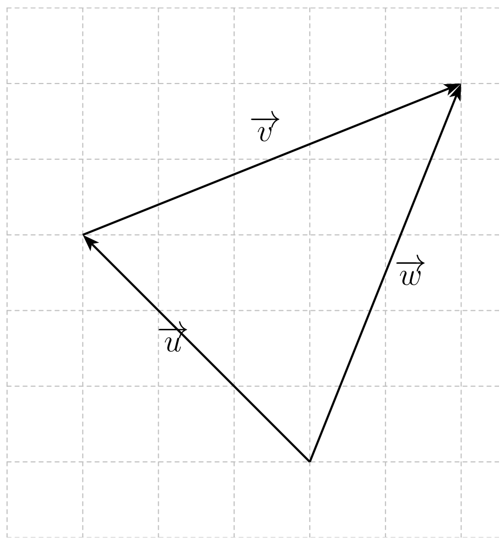
Section 1

Introduction :

Le produit scalaire de deux vecteurs « corrige » l'éventuel défaut d'orthogonalité. En général, les repères géométriques utilisés sont orthonormaux ce qui permet l'utilisation de formules simples pour le calcul de longueur par exemple. Si le repère n'est même pas orthogonal, il faut corriger le calcul fait en compensant avec la valeur du produit scalaire comme l'illustre la figure suivante :



Le calcul de la norme de $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est facile si les vecteurs sont orthogonaux : $\|\overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$



Dans ce cas le calcul de la norme de $\overrightarrow{w}$ est moins évident :$\|\overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \alpha$ où la valeur de α dépend de l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Section 2

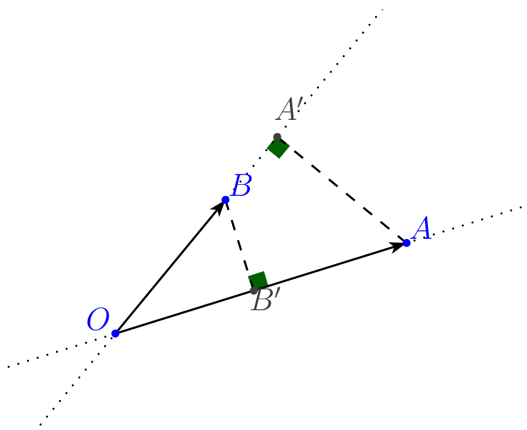
Rappel du produit scalaire dans le plan

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On rappelle dans un premier temps les principaux résultats de la classe de première.

2.1 Définitions

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On considère les deux points A et B du plan tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est égal à :
- $OA \times OB$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens
- $-OA \times OB$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de sens contraire
- $OA \times OB'$ ou $OA' \times OB$, où A' et B' désignent les projetés orthogonaux de A et B respectivement sur (OB) et sur (OA).



Dans le cas où l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul. Les propriétés suivantes découlent de la définition ci-dessus.

Calculs dans le plan

1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = OA \times OB \times cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$
2. Lorsque les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ sont $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans un repère **orthonormal** alors :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$
3. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2) = \dfrac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2)$

Remarques :

— On rappelle que l'écriture $\|\overrightarrow{u}\|$ désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$. On a alors dans un repère orthonormal du plan :$\|\overrightarrow{u}\| = OA = \sqrt{x^2+y^2}$

— $cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = cos(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$ donc en particulier $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$

Propriétés opératoires du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ et pour tout réel k, on a :

1. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
2. $(k\times\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\cdot(k\times\overrightarrow{v}) = k\times(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$
3. $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$

Ces propriétés permettent de conduire des calculs avec des produits scalaires.

2.2 Orthogonalité

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si l'un au moins est nul ou s'ils indiquent des directions perpendiculaires.
Le symbole d'orthogonalité des vecteurs est donc le même que la perpendicularité des droites ($\perp$)

Caractérisation de l'orthogonalité

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Remarque : Que devient l'expression $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2) = \frac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2)$ lorsque les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux ?
Le triangle AOB devient alors rectangle en O et on retrouve l'expression du théorème de Pythagore :$OA^2+OB^2-AB^2=0$.

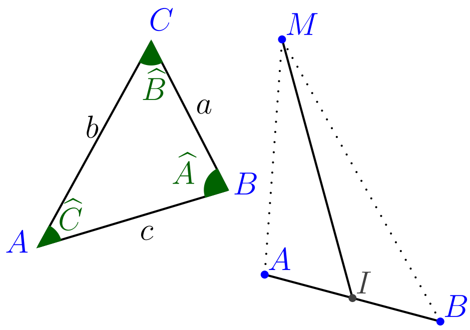
Relation métriques et trigonométriques dans un triangle

ABC est un triangle quelconque et I est le milieu de $[AB]$

Théorème d'AL-KASHI Dans le triangle ABC ,on a : $a^2 = b^2+c^2-2bccos\widehat{A}$

Théorème de la médiane Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2+MB^2 = 2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$



Remarque :

- D'autres formules se déduisent par permutation circulaire($A \to B, B \to C, C \to A$).
- Le théorème d'AL-KASHI est l'extension du théorème de Pythagore à n'importe quel triangle.

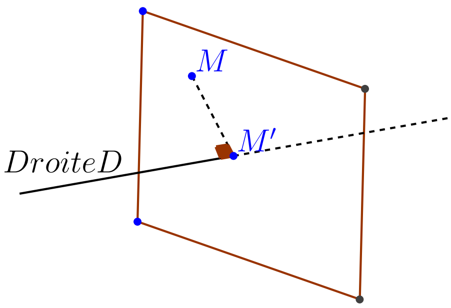
Section 3

Définition et propriétés du produit scalaire dans l'espace

3.1 Projection orthogonale dans l'espace

Définition

$\mathcal{D}$ est une droite et M un point de l'espace. Le plan $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ passant par M et perpendiculaire à $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{D}$ en un point M' appelé **projeté orthogonal** de M sur la droite $\mathcal{D}$.



De la même façon, on peut définir le projeté orthogonal d'un point sur un plan.

3.2 Définition du produit scalaire dans l'espace

Définition

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'espace et A, B et C sont trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C.
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $\mathcal{P}$.

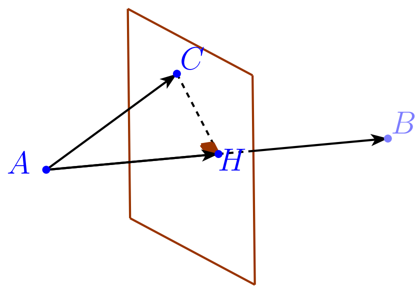
Remarques :
- Le plan $\mathcal{P}$ est unique si les points A, B et C ne sont pas alignés.
- Dans le cas du produit scalaire dans l'espace, on se ramène donc au produit scalaire dans le plan en recherchant ce plan $\mathcal{P}$ contenant des représentants des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

3.3 Plusieurs expressions de produit scalaire

Dès lors que l'on se ramène à étudier le produit scalaire de deux vecteurs dans un même plan, les règles énoncées dans le plan s'appliquent à l'espace.

Calculs de produit scalaire

Avec les notations usuelles, on a :
1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = AB \times AC\, cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$
2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ où H désigne le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
3. Lorsque les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ sont $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ dans un repère **orthonormal** alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$

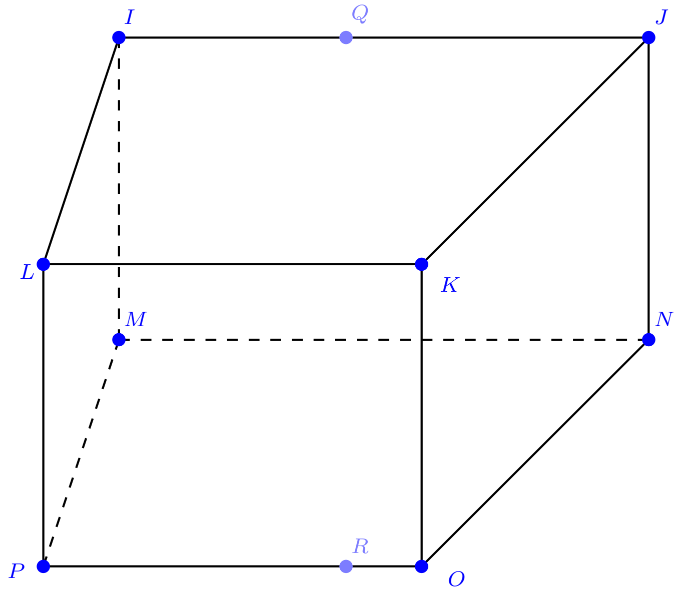


Enfin les règles de calculs (linéarité, commutativité et distributivité) s'appliquent au produit scalaire de l'espace.

Exercice 1

On considère le prisme ci-dessous constitués de rectangles et de trapèzes rectangles. On donne $IJ = 14, IQ = 6, LP = PR = 8$ et $PO = 10$.

1. Calculer $\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{PO}$,$\overrightarrow{IQ} \cdot \overrightarrow{QJ}$,$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{KO}$,$\overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{JK}$ puis $\overrightarrow{RK} \cdot \overrightarrow{PO}$.
2. Calculer $\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{LO}$ puis $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{MN}$.



3.4 Orthogonalité dans l'espace

3.4.1 Orthogonalité de droites

De la même façon, on peut caractériser l'orthogonalité de l'espace par le produit scalaire.

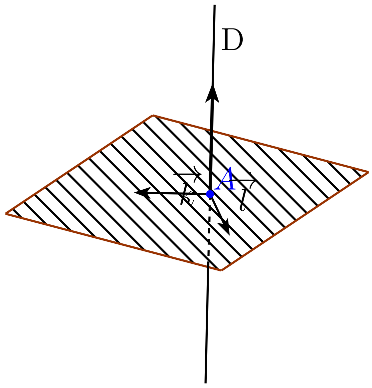
Caractérisation de l'orthogonalité

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Alors les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Deux droites peuvent être orthogonales sans être sécantes !

3.4.2 Orthogonalité de plans

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan. Alors la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe deux vecteurs $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{l}$ non colinéaires du plan $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{l} = 0$.



En d'autres termes, il faut que le vecteur directeur de la droite soit **normal** à une base du plan !

Définition

Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ lorsque toute droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$.

Remarquons l'avantage du vecteur normal par rapport aux vecteurs directeurs, du moins dans l'espace :

*Il suffit d'**un** vecteur normal pour diriger un plan alors qu'il faudrait **deux** vecteurs directeurs pour le diriger !*

Exercice 2

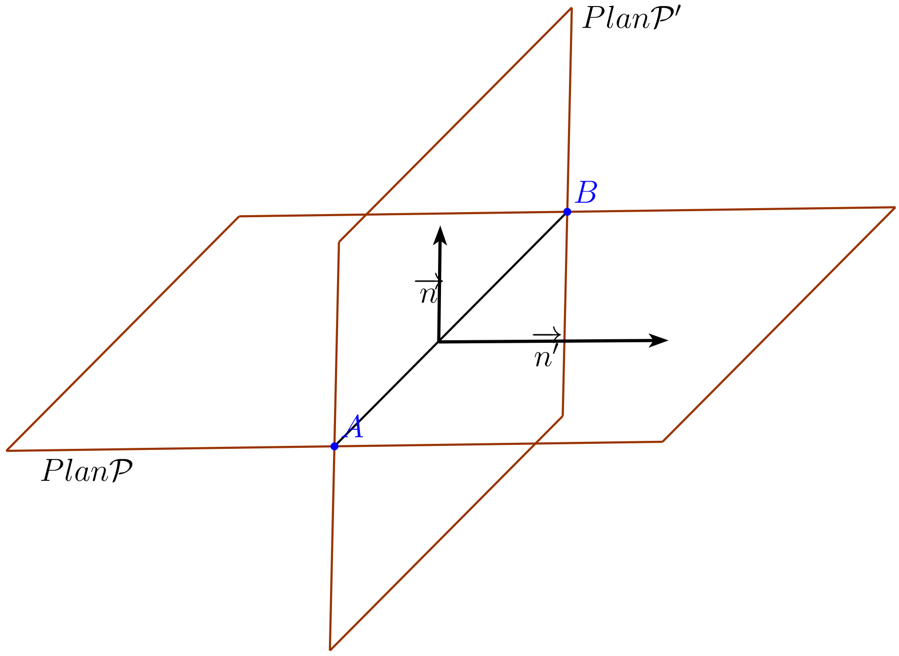
Soit $A(1,0,5), B(-1,2,2)$ et $C(0,0,1)$.

1. Prouver que ces trois points définissent un plan.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC).

On en déduit naturellement la propriété suivante :

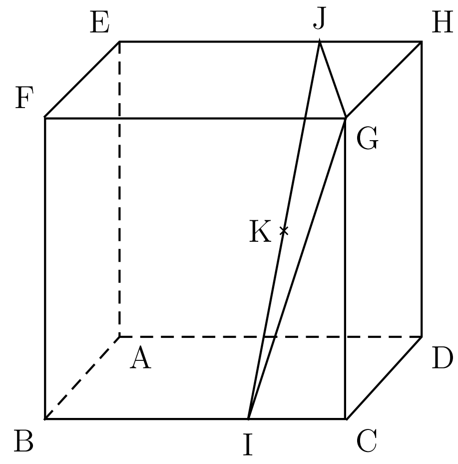
Perpendicularité de plans

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$. Alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$.



Exercice 3

On a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.



On a placé :

les points I et J tels que $\overrightarrow{\mathrm{BI}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EJ}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{EH}}$.

le milieu K de [IJ].

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).

Partie A

1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F.
   En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

   On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.
2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB).

On note $(x\ ;\ y\ ;\ 0)$ les coordonnées du point N.

1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J.
2. (a) Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).
   (b) Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{\mathrm{G}N} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{G}N} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FJ}}$ en fonction de x et y.
   (c) Déterminer les coordonnées du point N.
3. Placer alors le point P sur la figure en annexe.

Section 4

Applications

4.1 Équation cartésienne d'un plan

Le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ d'un plan $\mathcal{P}$, permet de caractériser le plan $\mathcal{P}$ comme l'ensemble des points M de l'espace tels que :$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, où A est un point de $\mathcal{P}$.
La propriété suivante définit l'équation cartésienne d'un plan.

Équation cartésienne de plan

Dans un repère orthonormal de l'espace,

1. Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(a; b; c)$ a une équation de la forme : $ax + by + cz + d = 0$
2. Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que :
$$ax + by + cz + d = 0 \text{ où } (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$
est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(a; b; c)$.

Remarques :

1. La démonstration repose sur la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ énoncée ci-dessus.
2. Un plan a une infinité d'équation ; en effet si $(\mathcal{P}) : ax+by+cz+d = 0$ alors $(\mathcal{P}) : kax+kby+kcz+kd = 0$, où k est un réel non nul, est aussi une équation de $\mathcal{P}$

Exercice 4

On considère l'ensemble E des points M de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient la relation : $6x - y + 2z = 2$.

1. Justifier que E est un plan de l'espace
2. Déterminer les coordonnées de trois autres points du plan E.
3. Déterminer les coordonnées de trois vecteurs normaux à ce plan.
4. Déterminer l'équation cartésienne d'un plan perpendiculaire à E.
5. Que dire du plan P d'équation $-12x + 2y - 4z = -4$?
6. Que dire du plan P' d'équation $6x - y + 2z = 0$?

Exercice 5

On considère les points $A(1,0,2)$, $B(-2,1,5)$ et $C(2,-2,0)$.

1. (a) Justifier que les points A, B et C définissent un plan de l'espace.
   (b) Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(4,-3,5)$ est un vecteur normal du plan (ABC).
   (c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit D le point de coordonnées $(3,3,-3)$. Déterminer l'équation du plan (P_1) passant par D et parallèle (ABC).
3. Soit (P_2) le plan d'équation $x+y+z-1=0$.
   (a) Justifier que les plans (ABC) et (P_2) sont sécants en une droite D.
   (b) Déterminer une équation paramétrique de la droite D.

Exercice 6

On considère la droite D dont la représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2+t \\ y & = & 10-t \\ z & = & 20+2t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$ et le plan P d'équation cartésienne $3x-y-z=1$.

1. Justifier que la droite D coupe le plan P. On appelle N le point d'intersection.
2. Déterminer les coordonnées de N.

4.2 Équation d'une sphère

C'est aussi une conséquence d'un produit scalaire dans l'espace. On considère la sphère S de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon $R>0$. Alors :

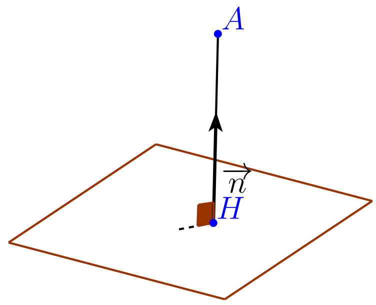
$$\boxed{\text{Un point } M(x,y,z) \text{ appartient à la sphère } S \text{ si et seulement si } (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2}$$

4.3 Distance à un plan

Distance dans l'espace

Dans un repère orthonormal, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $ax+by+cz+d=0$. Soit A le point de l'espace de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$. Alors la distance d du point A au plan $\mathcal{P}$ est :

$$d = AH = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



$P : ax + by + cz + d = 0$

Remarques :

— Dans le cas de la figure ci-dessus, le plan P est **tangent** à la sphère de centre A et de rayon $R = AH$.
— Si le point A appartient au plan P alors $d = 0$!

Exercice 7

On considère le plan P d'équation $x - y + 2z = 3$.

1. Déterminer la distance du point $A(1, 1, 5)$ au plan P.
2. Déterminer la distance du plan P à l'origine du repère.

Exercice 8

On considère les points $A(3, -2, 10)$, $B(0, 5, 6)$, $C(-2, 2, 4)$ et $D(10, -5, 1)$. Déterminer le volume de la pyramide $ABCD$.