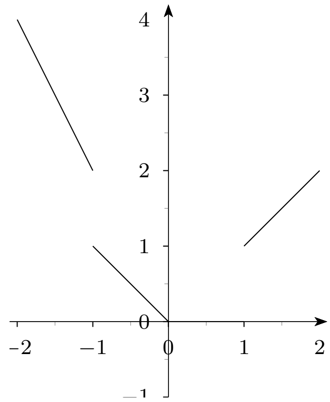
Exercice 1 Le tableau ci-dessous donne l'expression de la fonction f définie pour tout x dans $[-2, 2]$ par :

$$f(x) = xE(x)$$

obtenu à partir de la valeur de la partie entière $E(x)$ de x.

x	-2	-1	0	1	2
$E(x)$	-2	-1	0	1	
$xE(x)$	$-2x$	$-x$	0	x	



Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 12x$.

1. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$. *La méthode est connue : par opérations on trouve la forme indéterminée de la somme $+\infty - \infty$. On factorise donc par le terme de plus haut degré pour transformer l'expression de f et lever ainsi la forme indéterminée :*

$$f(x) = x^3(1 - \frac{12}{x^2})$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{12}{x^2} = 0$. *Donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{12}{x^2} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$. *Les mêmes arguments conduisent à* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. *Là aussi aucune hésitation à avoir, la méthode est connue ! Pour tout x, $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$. Le tableau ci-dessous donne le signe de f' à partir duquel on en déduit les variations de f.*

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

3. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 30$ sur $\mathbb{R}$. En donner une valeur approchée au centième. *Le tableau de variations de f montre comment évoluent les valeurs de $f(x)$; en particulier, pour $x \leq 2$, $f(x) \leq 16$. L'équation $f(x) = 30$ n'a donc pas de solutions dans l'intervalle $]-\infty; 2]$.Puis dans l'intervalle $I = [2; +\infty[$:*

- *la fonction f est continue et les valeurs de $f(x)$ augmentent de -16 à $+\infty$, donc dépasse 30... ; il existe donc une valeur α dans I telle que $f(\alpha) = 30$.*
- *la fonction f étant strictement croissante sur I, cette solution α est unique dans I.*

En résumé, il existe une unique solution dans $\mathbb{R}$ *telle que* $f(\alpha) = 30$.
Pour trouver une valeur approchée de α*, on utilise le tableur de la calculatrice :*

pas=1			pas=0.1			pas=0.01			pas=0.001		
x	4	5	x	4.3	4.4	x	4.34	4.35	x	4.347	4.348
$f(x)$	16	65	$f(x)$	27.907	32.384	$f(x)$	29.666	30.1128	$f(x)$	29.97869	30.02339

En diminuant le pas, on obtient un encadrement de plus en plus précis de α *: en effet* $4.347 < \alpha < 4.348$, *donne un encadrement au millième et une valeur approchée au centième* $\alpha \approx 4.35$.

4. Soit k un nombre réel. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ selon les valeurs de k.
La lecture du tableau de variations de f *donne :*
— *L'équation* $f(x) = k$ *admet une unique solution si* $k > 16$ *ou* $k < -16$ *;*
— *L'équation* $f(x) = k$ *admet deux solutions si* $k = 16$ *ou* $k = -16$ *;*
— *L'équation* $f(x) = k$ *admet trois solution si* $-16 < k < 16$.

Exercice 3 Soit l'équation (E) : $\dfrac{2x+3}{x+1} = x^2$.

1. Démontrer que (E) admet une solution unique α dans l'intervalle $[1;2]$.
L'équation (E) *devient* $2x + 3 = x^2x + 1$ *puis* $x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$. *En posant* h *la fonction définie pour tout* x *par* $h(x) = x^3 + x^2 - 2x - 3$ *; en étudiant les variations de* h*, nous devrions pouvoir résoudre le problème... Pour tout* x*,* $h'(x) = 3x^2 + 2x - 2$. *Étudions le signe du* h' *qui est un polynôme du second degré.*
On a $\Delta = 28$ *; donc* h' *change de signe autour de ses deux racines* $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$ *et* $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
			$f(x_1)$				$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$f(x_2)$		

où $f(x_1) < 0$. *La fonction* h *étant continue et strictement croissante sur l'intervalle* $I = [1;2]$ *de* $f(1) < 0$ *à* $f(2) > 0$*, l'équation* $h(x) = 0$ *admet une unique solution* α *dans cet intervalle.*

2. Déterminer une valeur approchée de α au centième.
À la calculatrice, $\alpha \approx 1.10$