Exercice 1 Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.

Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,20]$ par :

$$f(t) = (0,8t + 0,2)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03.$$

On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.
Ainsi, la valeur $f(0) = 0,23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0		$1,75$		20
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	$0,23$	$\nearrow$		$\searrow$	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
   a. Calculer $f(20)$.
   b. Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
   a. Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.
   b. On considère l'algorithme suivant :

```
t ← 1,75
p ← 0,1
V ← 0,7
Tant que V > 0,035
    t ← t + p
    V ← (0,8t + 0,2)e^(−0,5t) + 0,03
Fin Tant que
```

   Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?
   Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?
3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.
   a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,11]$ par :
   $$F(t) = (-1,6t - 3,6)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03t.$$
   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,11]$.
   b. Le taux moyen V_m, valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,11]$ est égale à :
   $$V_m = \frac{1}{11}(F(11) - F(0))$$
   où F est une primitive de f. Calculer V_m et arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.

Exercice 2 On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

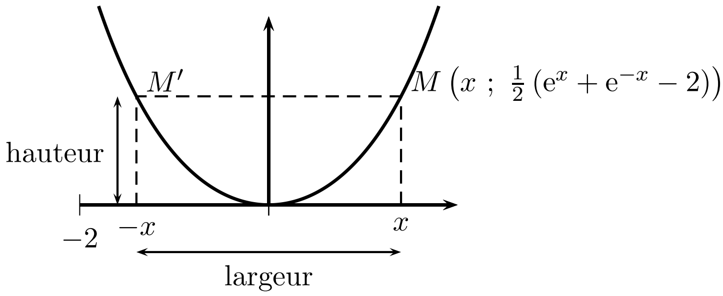
$$y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2\right).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».

On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.

On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation

$$(E) : \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2.$$

a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} - 4\right) + \mathrm{e}^{-x} - 2$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation : $\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2 - 4\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$.

c. En posant $X = \mathrm{e}^{x}$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$.

4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f :

x	0		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α.

5. On considère l'algorithme suivant où les variables a, b et m sont des nombres réels :

> Tant que $b - a > 0,1$ faire :
> $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
>   Si $\mathrm{e}^{m} + \mathrm{e}^{-m} - 4m - 2 > 0$, alors :
> $b \leftarrow m$
>   Sinon :
> $a \leftarrow m$
>   Fin Si
> Fin Tant que

a. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.

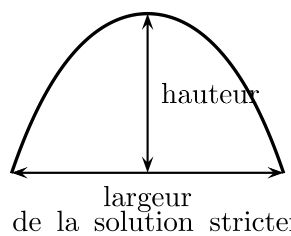
Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2,5			
...	...	...	

b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

6. La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-contre.
Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.



La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$\left(E'\right) : \mathrm{e}^{\frac{t}{39}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch*.

Exercice 3

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de u sur $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $\text{A}M = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
  a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\ ;\ +\infty[$.
  b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.
  c. Montrer que $\text{AP} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.
3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?