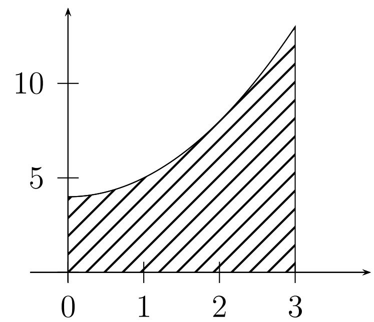
Mathématiques en Terminale S
Calcul intégral

Table des matières

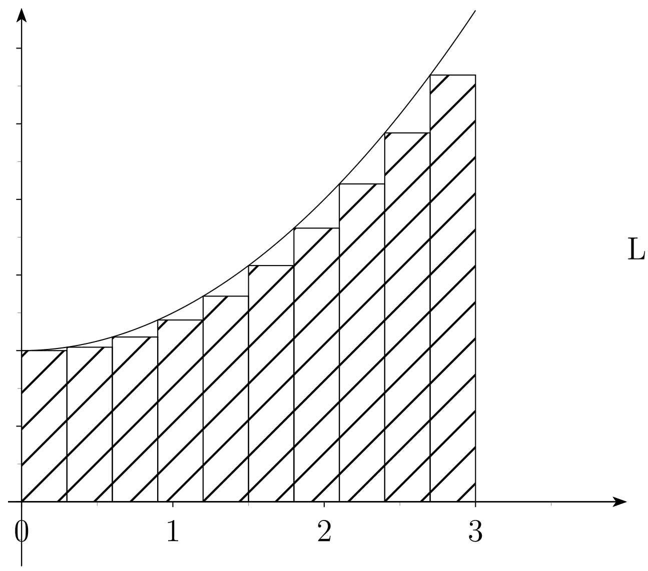
Section 1

Aire sous une courbe

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 4$ pour tout x dans l'intervalle $[0;3]$.On souhaite déterminer l'aire du domaine sous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.Précisément le domaine délimité par la courbe et l'axe des abscisses en hauteur, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$ en largeur.



Pour approcher la valeur de cette aire, on découpe le domaine en des figures dont on connaît l'aire. Par exemple,la figure suivante donne une valeur approchée de l'aire du domaine avec dix rectangles :



L'aire des rectangles inférieurs est :19.695

Choisissons un entier n non nul et découpons le segment $[0;3]$ en n segments de longueur égale à $\dfrac{3}{n}$. On obtient alors n rectangles de hauteur $f(k \times \dfrac{3}{n})$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
Ainsi, une approximation par défaut de l'aire du domaine est-elle donnée par la somme :

$$A_n = f(0) \times \frac{3}{n} + f(\frac{3}{n}) \times \frac{3}{n} + ... + f((n-1)\frac{3}{n}) \times \frac{3}{n}$$

$$\text{soit : } A_n = \sum_{0}^{n-1} f(k\frac{3}{n}) \times \frac{3}{n}$$

$$\text{ou encore : } A_n = \frac{3}{n} \sum_{0}^{n-1} f(k\frac{3}{n}) \text{ car } \frac{3}{n} \text{ ne dépend pas de } k.$$

En augmentant la valeur de n, on augmente le nombre de rectangles pour se rapprocher de la valeur exacte de cette aire.Calculons ainsi la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Sachant que $f(x) = x^2 + 4$, alors :

$$f(k \times \frac{3}{n}) = (k \times \frac{3}{n})^2 + 4 = \frac{9k^2}{n^2} + 4$$

Donc : $\sum_{0}^{n-1} f(k \times \frac{3}{n}) = \sum_{0}^{n-1} \frac{9k^2}{n^2} + 4 = \frac{9}{n^2} \sum_{0}^{n-1} k^2 + \sum_{0}^{n-1} 4 = \frac{9}{n^2} \times \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + 4n$ ✍
Finalement :

$$A_n = \frac{3}{n} \sum_{0}^{n-1} f(k\frac{3}{n}) = \frac{3}{n} \times (\frac{9}{n^2} \times \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + 4n) = \frac{9}{2} \times \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2} + 12$$

Avec : $\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2} = 2$, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = 21$$

Cette aire est à la base de la définition de l'intégrale de 0 à 3 de la fonction f telle qu'on la définit en terminale.

✍. La somme des n premiers carrés est : $\sum_{1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

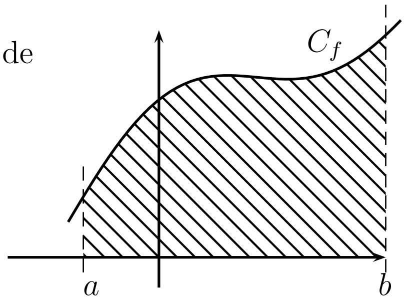
Section 2

Définitions

2.1 Fonction continue et positive sur un intervalle

Le domaine $\mathcal{D}$ sous la courbe est l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) tels que :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$



Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'intégrale de a à b de la fonction f, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire du domaine $\mathcal{D}$ défini ci-dessus.

Remarques :

— Les nombres a et b sont appelés les bornes de l'intégrale.
— La particule dx est importante. Elle peut être interprétée comme une infime largeur d'un rectangle de hauteur $f(x)$ pour x dans $[a, b]$. Elle indique de plus la variable à intégrer bien qu'en terminale il n'y ait pas d'ambiguïté.
— Le symbole $\int$ est un S atrophié. Une intégrale est une somme de valeurs distribuées continûment.

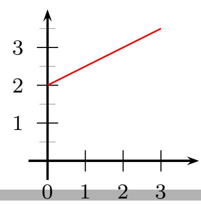
Exemple 1

En considérant les domaines définis par la courbe représentative de la fonction f intégrée et les bornes des intégrales :

— $\displaystyle\int_0^2 5\,dx = 2 \times 5 = 10$(aire d'un rectangle)
— $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{3-x}{3}\,dx = \frac{6 \times 2}{2} = 6$(aire d'un triangle)

Exercice 1

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$ sachant que la représentation graphique de f est donnée ci-après :



Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes en appliquant la définition ci-dessus :

— $\displaystyle\int_0^4 x\,dx$

— $\displaystyle\int_0^{10} -2x+30\,dx$

Deux conséquences immédiates de la définition ci-dessus :

Bornes égales

Soit f un fonction continue et positive sur $[a;b]$. Alors : $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

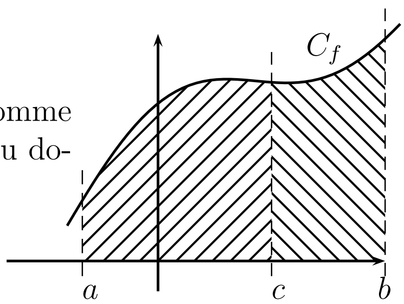
Un domaine sans largeur a évidemment une aire nulle...La propriété suivante est connue sous le nom de relation de Chasles.

Relation de Chasles

Soit f un fonction continue et positive sur $[a;b]$ et c un réel dans $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Quelque soit le réel c dans l'intervalle $[a,b]$,la somme des aires des deux domaines est égale à l'aire du domaine $\mathcal{D}$.



Inversement des bornes

Soit f un fonction continue et positive sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Exercice 3

Démontrer la proposition précédente.

Simple ! En effet d' après les proposition précédente, quelque soit les réels a et b :

$$\int_a^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0$$

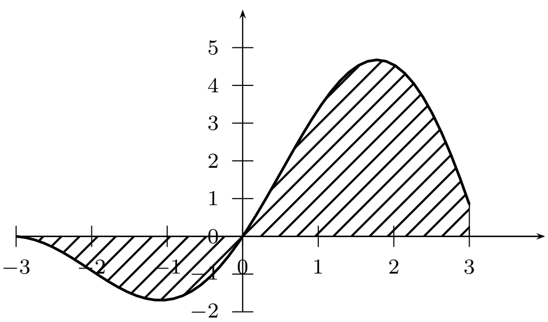
2.2 Fonction continue de signe quelconque

2.2.1 Intégrale d'une fonction continue et négative sur $[a;b]$

L'intégrale de a à b de la fonction f, est égale dans ce cas, à l'opposé de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ situé entre l'axe des abscisses et la courbe.Ainsi une intégrale peut être **négative !**. Rappelons un des points de vues adopté : l'intégrale de a à b de $f(x)$ est égale à la **somme** de toutes les valeurs de $f(x)$ pour x parcourant l'intervalle $[a;b]$; cette somme est bien entendue infinie mais si toutes les valeurs de $f(x)$ sont négatives, alors leur somme le sera aussi.

2.2.2 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque sur $[a;b]$

On peut alors "découper" à l'aide de la relation de Chasles,l'intervalle $[a;b]$ en des intervalles où la fonction a un signe constant. L'intégrale de a à b de la fonction f, est égale dans ce cas,à la **somme algébrique des aires** des domaines ainsi déterminés. On entend par somme algébrique le fait qu'une aire peut être « négative » ; l'aire située sous l'axe des abscisses serait « négative » et celle au-dessus serait positive. La somme des deux serait visiblement positive ici.



Exercice 4

Démontrer que $\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin(x)\,dx = 0$ quelle que soit la valeur de α. On pourra s'appuyer sur des arguments graphiques.

Section 3

Calcul d'une intégrale

Théorème

Si f est une fonction continue sur un intervalle I contenant la valeur a alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en $x = a$.

Démonstration dans le cas d'une fonction continue et croissante sur I :
Démontrons que le nombre dérivé de F en une valeur x_0 de I est $f(x_0)$, quelque soit cette valeur x_0.
$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$ d'après la relation de Chasles.

— Si $h>0$, f étant croissante, pour tout t de $[x_0;x_0+h]$, on a $f(x_0)\leq f(t)\leq f(x_0+h)$.
  Donc, en intégrant l'inégalité, on en déduit :$f(x_0)\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\leq f(x_0+h)$, c'est-à-dire :
  $f(x_0)\leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leq f(x_0+h)$.
— Si $h<0$ par le même raisonnement on obtient $f(x_0+h)\leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leq f(x_0)$.

f est continue sur I donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$ et d'après le théorème des gendarmes :
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$. La fonction F est donc dérivable en x_0 quelque soit x_0 dans I. Donc F est dérivable sur I et $F'=f$. Donc F est une primitive de f sur I. De plus $F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$, donc F s'annule en a

Calcul d'une intégrale avec une primitive F de f.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a;b]$

On insiste sur le fait que n'importe quelle primitive F de f permet le calcul de l'intégrale. Quelques exemples :

Exemple 2

— $\int_0^3 (x^2+4)dx=[\,\frac{x^3}{3}+4x\,]_0^3=21$ (exemple d'introduction)
— $\int_1^e \frac{1}{x}dx=[\,\ln(x)\,]_1^e=1$
— $\int_1^4 e^{2x-1}dx=[\,\frac{1}{2}e^{2x-1}\,]_1^4$

Le calcul intégral est donc possible par la connaissance d'une primitive de la fonction f intégrée.D'autres méthodes existent sans qu'elles ne soient développées ici.

Section 4

Propriétés

Les propriétés suivantes peuvent facilement s'interpréter en termes d'aires.

4.1 Linéarité

Linéarité de l'intégrale

Pour toutes fonctions f et g continues sur un intervalle $[a;b]$, on :

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
2. Pour tout réel α, $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx$.

Exemple 3

On sait que $\displaystyle\int_0^3 x^2\,dx = 9$ et $\displaystyle\int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$; on peut donc en conclure par exemple que :
$\displaystyle\int_0^3 5x^2 - 2x + 1\,dx = 5\times\int_0^3 x^2\,dx - 2\times\int_0^3 x\,dx + \int_0^3 1\,dx = 5\times 9 - 2\times\frac{9}{2} + 3$

4.2 Ordre

Intégrale et ordre

1. Si $f(x)\geq 0$ pour tout x de $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
2. Si $f(x)\leq 0$ pour tout x de $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.

Intégrale et ordre

Si $f(x)\leq g(x)$ pour tout x de $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Exemple 4

On considère la suite (u_n) définie pour tout n par : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x}\,dx$

On a pour tout x dans $[n; n+1]$: $0 \leq e^{-x} \leq e^{-n}$ et en passant à l'intégrale $0 \leq u_n \leq e^{-n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ (suite géométrique de raison $q = e^{-1}$), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

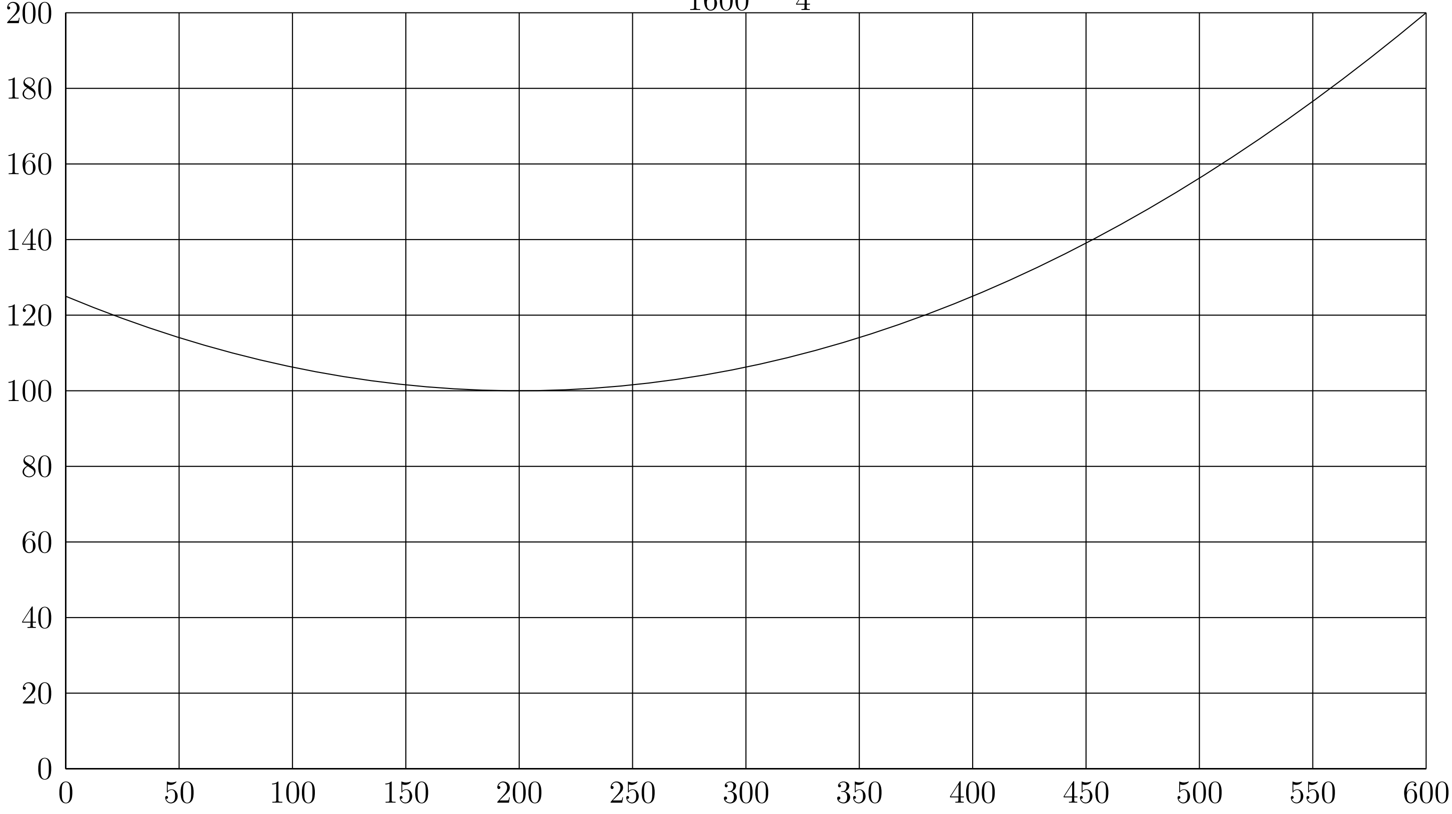
Section 5

Applications

5.1 Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Le profil d'un terrain est donné par le graphique ci-contre. Les distances et les hauteurs sont exprimées en mètres.
On désire niveler ce terrain, c'est-à-dire faire en sorte que les remblais équilibrent exactement les déblais.
La hauteur s'exprime en fonction de la distance d par la fonction mathématique :

$$h(d) = \frac{d^2}{1600} - \frac{d}{4} + 125.$$



Le problème consiste en fait à déterminer la hauteur h_m d'un rectangle de largeur 600 ayant la même aire que le domaine $\mathcal{D}$ situé entre la courbe et l'axe des abscisses. On doit donc avoir :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = h_m \times 600 \text{ soit } h_m = \frac{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}}{600} = \frac{1}{600}\int_0^{600} h(x)\,dx$$

Cette valeur de h_m est appelée valeur moyenne de la fonction h sur l'intervalle $[0; 600]$.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.La valeur moyenne μ de f sur $[a;b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

On trouve après calculs :$h_m = 125$.
Cette formule est bien la moyenne des valeurs possibles de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $[a;b]$; on considère qu'il y a "$b-a$" valeurs de $f(x)$ en comparaison avec la formule des données discrètes : $m = \dfrac{1}{N}\sum_1^n x_i$

Exemple 5

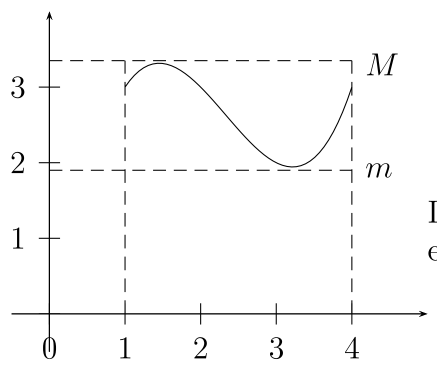
Quelle est la valeur moyenne de la fonction carrée sur $I = [-2;2]$?
Par définition : $\mu = \dfrac{1}{2-(-2)}\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \dfrac{1}{4}\times[\,\dfrac{1}{3}x^3\,]_{-2}^{2} = \dfrac{4}{3}$
Quelle est la valeur moyenne de la fonction cube sur $I = [-2;2]$? Facile elle vaut 0. Pourquoi ? Cette fonction est impaire sur $I = [-2;2]$; pour une valeur de $f(x)$ pour x dans $[0;2]$, il existe la valeur de $-f(x)$ dans $[-2;0]$.

5.2 Inégalité de la moyenne

Propriété

Soit m et M deux réels tels que pour tout x de $[a;b]$, $m \le f(x) \le M$. Alors :

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$



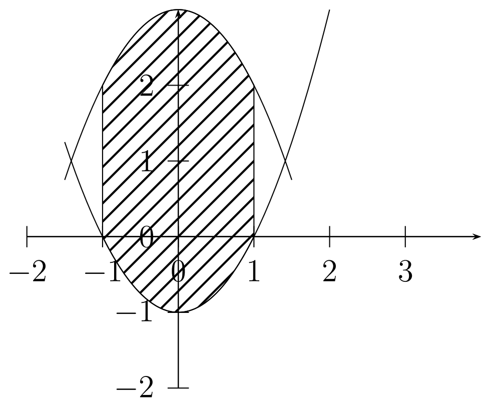
L'aire du domaine est minorée par l'aire du rectangle de hauteur m et majorée par l'aire du rectangle de hauteur M .

5.3 Calcul d'aire

Quelle est l'aire du domaine hachuré ci-dessous délimité par la courbe représentative de deux fonctions ?
Les paraboles sont représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 3 - x^2 \text{ et } g(x) = x^2 - 1$$

Facile !



Aire d'un domaine délimité par deux courbes

On considère les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur un intervalle $[a, b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x dans $[a; b]$. Alors l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ définie par les courbes représentatives de f et g et les droites d' équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Exemple 6

En appliquant cette propriété aux fonctions précédentes, l'aire de la partie hachurée est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} [3 - x^2 - (x^2 - 1)]\, dx = \int_{-1}^{1} [4 - 2x^2]\, dx = [4x - \frac{2}{3}x^3]_{-1}^{1} = \frac{20}{3}$$

Les aires se calculent en **unité d'aires(u.a)** où $1u.a$ est égale à l'aire du rectangle défini par les unités du repère (qui est un carré dans un repère orthonormé).Dans l'exemple précédent, les unités sur chaque axe sont définies égales au centimètre : donc $1u.a = 1\text{cm} \times 1\text{cm} = 1\text{cm}^2$. Ainsi la surface hachurée mesure t-elle $\frac{20}{3}\text{cm}^2 \approx 6.33\text{cm}^2$...

5.4 Algorithme de calculs

On considère la fonction f définie pour tout réel t,par :

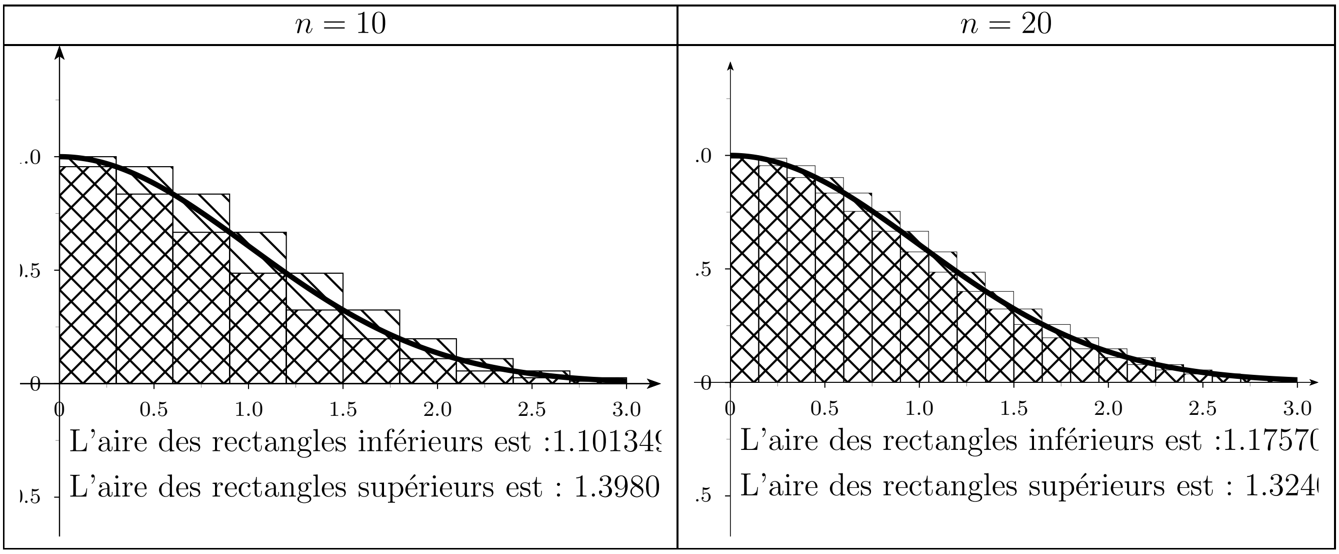
$$f(t) = e^{-\dfrac{t^2}{2}}$$

On ne connaît pas explicitement une primitive F de f. On se propose néanmoins de déterminer des valeurs approchées de $F(a), a \in \mathbb{R}$ où F est la primitive de f qui s'annule en 0. Autrement dit :

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

On rappelle que $F(a)$ est défini comme l'aire du domaine délimité par la courbe,l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$. Par la méthode des rectangles, on souhaite obtenir une valeur approchée par défaut et par excès de $F(a)$.
On appelle u_n la suite des sommes des aires des n rectangles de largeur $\dfrac{a}{n}$ et de hauteur $f(k \times \dfrac{a}{n})$ pour $0 \leq k \leq n-1$, c'est-à-dire la suite des rectangles supérieurs. On appelle v_n la suite des sommes des aires des n rectangles de largeur $\dfrac{a}{n}$ et de hauteur $f(k \times \dfrac{a}{n})$ pour $1 \leq k \leq n$, c'est-à-dire la suite des rectangles inférieurs. Alors, pour tout entier n :

$$v_n \leq F(a) \leq u_n$$



On remarque que la convergence est très lente et qu'on obtient par cette méthode une précision à 10^{-2} près pour n au delà de 300.
En effet, à partir de quelle valeur de n a t-on $u_n - v_n < 10^{-2}$?

$$u_n - v_n = \frac{a}{n}(\sum_0^{n-1} f(k\frac{a}{n}) - \sum_1^n f(k\frac{a}{n})) = \frac{a}{n}(1 - f(a)).$$

Donc si $a = 3$ alors $u_n - v_n = \dfrac{3}{n}(1 - e^{-\frac{9}{2}})$. Ainsi :

$$u_n - v_n < 10^{-2} \Rightarrow n > 300.$$

et plus généralement $u_n - v_n < 10^{-p} \Rightarrow n > 3 \times 10^p$ quelque soit p entier.
On peut dès lors construire un programme d'encadrement de $F(3)$, c'est-à-dire de l'aire du domaine défini ci-dessus.

```python
from math import exp
def f(x):
    return exp(-x**2/2)

def rectsup(n, a, b):
    '''
    param: n nombre de rectangle
              a borne gauche
              b borne droite
    return: retourne la somme des aires
    des n rectangles superieurs
    '''
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + (b-a)/n*f(i*(b-a)/n)
    return s
def rectinf(n, a, b):
    '''
    param: n nombre de rectangle
              a borne gauche
              b borne droite
    return: retourne la somme des aires
    des n rectangles inferieurs
    '''
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + (b-a)/n*f((i+1)*(b-a)/n)
    return s

def methoderect(n, a, b):
    return rectinf(n, a, b), rectsup(n, a ,b)
```

Mais cet algorithme est très lent au sens où il génère deux suites qui convergent très lentement vers l'aire recherchée. Dans des exercices proposés en annexe nous verrons comment améliorer cette convergence.