Mathématiques en Terminale S
Propriétés des valeurs intermédiaires

Table des matières

Section 1

Introduction

Résoudre l'équation :

$$(E) : \cos(x) = x$$

dans $\mathbb{R}$.
L'équation proposée n'est pas simple au sens où il n'existe pas de méthodes algébriques connues permettant de la résoudre. Néanmoins avant d'établir une stratégie de résolution, une première interrogation semble indispensable :

Existe t-il au moins une solution ?

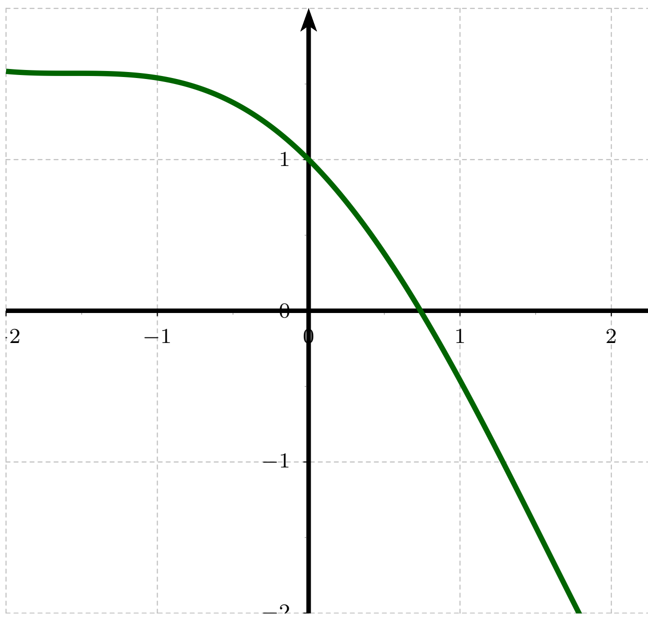
Cela ne sert en effet à rien de tenter de résoudre une équation si nous démontrons qu'elle n'a pas de solution...
Remarquons enfin que résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation

$$\cos(x) - x = 0$$

et définissons ainsi la fonction h qui à tout x associe $\cos(x)-x$. Prouver l'existence de solution de l'équation revient à prouver l'existence d'antécédent de 0 par h...

Première approche

La courbe représentative de la fonction h donne déjà une première réponse. Le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ correspond au nombre de points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.



Seconde approche

Étudions les variations de la fonction h pour définitivement lever le doute sur les valeurs prises par $h(x)$ lorsque x parcoure $\mathbb{R}$.On a pour tout x,

$$h'(x) = -\sin(x) - 1$$

Or sachant que pour tout x, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ on en déduit que $-2 \leq -\sin(x) - 1 \leq 0$ et donc que $h'(x) \leq 0$,$\forall x \in \mathbb{R}$. D'où les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de h	$+\infty$ ↘	$-\infty$

On constate que lorsque x parcoure $\mathbb{R}$, les valeurs de $h(x)$ passent de valeurs négatives à des valeurs positives donc passent par la valeur 0, sous couvert qu'il n'y ait pas de « sauts ».✍
C'est encore plus clair dans le tableau ci-dessous où les variations de h se limite à l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$.

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$
Variation de h	1 ↘	0 ↘	$-\frac{\pi}{2}$

On répond ainsi à notre interrogation première :

L'équation (E) : $\cos(x) = x$ admet une et une seule solution α dans $\mathbb{R}$

et en plus on la localiser dans l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ et même $[0; 1]$.

✍. principe même de la continuité de la fonction !

Reste maintenant à préciser cette solution α.Vous l'aurez compris aucun procédé algébrique permet d'en déterminer une valeur exacte ; on se contentera d'une valeur approchée à la précision souhaitée. Et pour cela rien ne vaut un bon petit algorithme... L'idée consiste à déterminer une suite (I_n) d'intervalles $[a_n; b_n]$ qui entoure α.L'une des façons de procéder consiste à réduire de moitié cet intervalle lorsque qu'on passe d'un rang au suivant. On définit ainsi la suite récurrente :

$$[a_{n+1}; b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n; \dfrac{a_n+b_n}{2}] & \text{si } h(\dfrac{a_n+b_n}{2}) < 0 \\ [\dfrac{a_n+b_n}{2}; b_n] & \text{si } h(\dfrac{a_n+b_n}{2}) > 0 \end{cases}$$

et arrêter la construction de ces intervalles pour une valeur de p telle que par exemple $|a_n - b_n| \leq 10^{-p}$... Voici ce que donne l'algorithme selon les valeurs de p choisie :

p	2	3	6	9
α	0.734375	0.7392578125	0.7390851974487305	0.7390851331874728

Ci-après l'implantation de cet algorithme dans le langage Python :

```python
##################################################
#### Attention ce programme ne fonctionne ###
## que pour la fonction h definie ci-dessous
##################################################
from math import cos
#creation de la fonction h
def h(x):
    return cos(x)-x
#entree de la precision
p=int(input('Donner la precision souhaitee'))
#initialisation automatique des variables
a=0
b=1
x=(a+b)/2
#condition sur h(x) et reaffectation des
#bornes a et b selon le signe de h(x)
while abs(h(x))>10**(-p):
    if h(x)>0:
        a=x
    else:
        b=x
    x=(a+b)/2
#affichage de la valeur calculee
print(x)
```

Section 2

Fonctions continues :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I. La notion de fonction **continue** a été soulevée dans la partie précédente pour désigner des fonctions qui ne présentent pas de « sauts » dans la distribution de ses valeurs...

Pour établir la continuité d'une fonction sur un intervalle I,on peut :

— visualiser sa courbe représentative sur l'intervalle I et constater ou non sa rupture ;

— évoquer la flèche oblique d'un tableau de variations qui sous-entend que cette fonction est continue sur l'intervalle d'étude ;

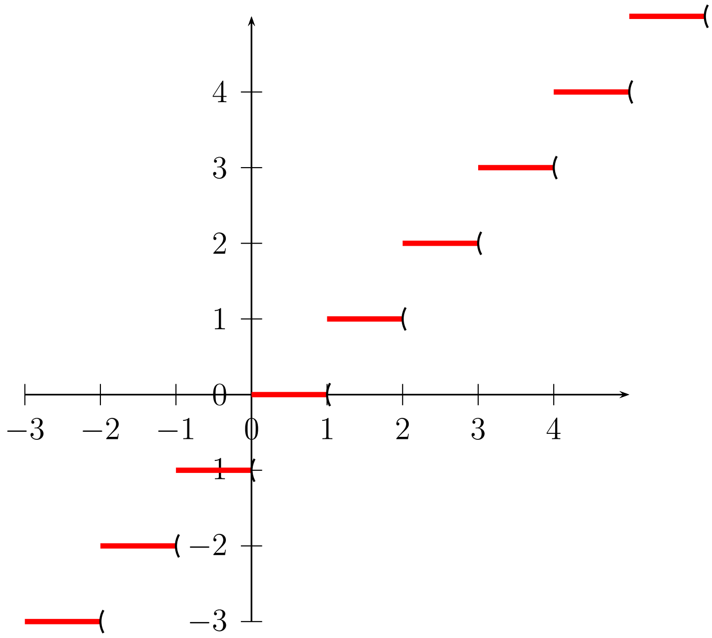
— qu'en tant que fonction dérivable elle est est continue.

L'étude précise de la continuité des fonctions en terminale S n'est pas une priorité ni une obligation...

Exemple 1

1. La fonction carrée est continue sur n'importe quel intervalle fermé $I = [a, b]$.
2. La fonction inverse est continue sur n'importe quel intervalle fermé $I = [a, b]$ **ne contenant pas 0**. De toute façon si une fonction n'est pas définie en une valeur x_0 elle ne peut pas être continue en en cette valeur...
3. La fonction $E(x)$ désignant la partie entière de x est **discontinue** en tout valeur entière de x.

Exercice 1 Dessiner la courbe représentative de la fonction $xE(x)$ sur $[-2; 2]$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.



Section 3

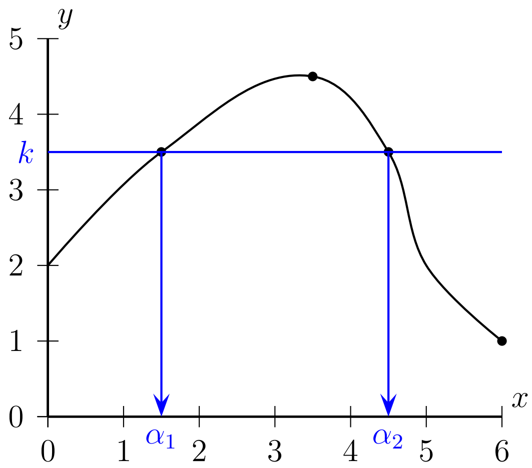
Théorème des valeurs intermédiaires :

On considère une fonction f définie et **continue** sur un intervalle $[a, b]$.Alors l'image de l'intervalle $[a, b]$ est un intervalle $[m, M]$ et pour toute valeur k comprise entre m et M, il existe **au moins** une valeur α dans $[a, b]$ telle que $f(\alpha) = k$.

Si de plus la fonction f est **strictement monotone** sur $[a, b]$, alors la solution α est unique !

Illustration graphique :

L'équation $f(x) = k$ où $1 \leq k \leq 4.5$ admet au moins une solution dans $[0; 6]$



Exercice 2 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 12x$$

1. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 30$ sur $\mathbb{R}$. En donner une valeur approchée au centième.
4. Soit k un nombre réel. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ selon les valeurs de k.

Exercice 3 Soit l'équation (E) : $\dfrac{2x+3}{x+1} = x^2$.

1. Démontrer que (E) admet une solution unique α dans l'intervalle $[1; 2]$.
2. Déterminer une valeur approchée de α au centième.