Mathématiques en Terminale S
Lois de probabilité continues

Table des matières

Section 1

Lois de probabilité continues

1.1 Principe et définitions

On considère une expérience aléatoire dont les issues ne sont plus **dénombrables** :

- choisir un **nombre réel** entre 0 et 100 ;
- prévoir la durée d'un appel téléphonique ;
- prévoir l'angle d'une girouette,...

Comment peut-on définir une loi de probabilité sur des résultats regroupés en intervalle ?
On rappelle qu'établir une loi de probabilité sur un univers fini Ω, consiste à attribuer aux N valeurs x_i de Ω , un réel positif p_i tels que :

Propriétés

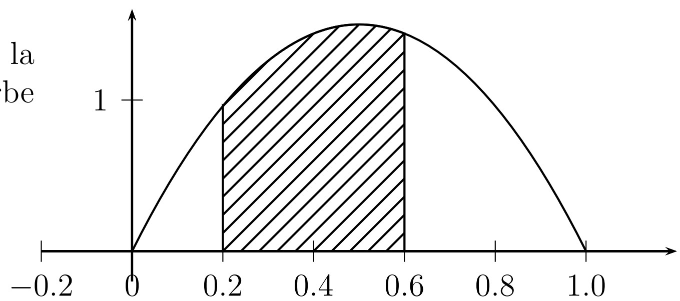
- $0 \leq p_i \leq 1$ pour $1 \leq i \leq N$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=N} p_i = 1$

Le réflexe consiste à poser $p_i = \dfrac{1}{N}$ quelque soit i ; on définit alors une loi équiprobable.
Mais comment faire lorsque Ω n'est pas fini ?

Exemple :

Un jeu consiste à tirer une flèche sur un cible dont la forme est donnée ci-contre. La parabole est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = 6x(1 - x)$$



On suppose que la flèche atteint toujours la cible et on appelle x l'abscisse du point d'impact P sur la cible.On s'intéresse à la probabilité de l'événement :

$$\text{E} : 0,2 \leq x \leq 0,6$$

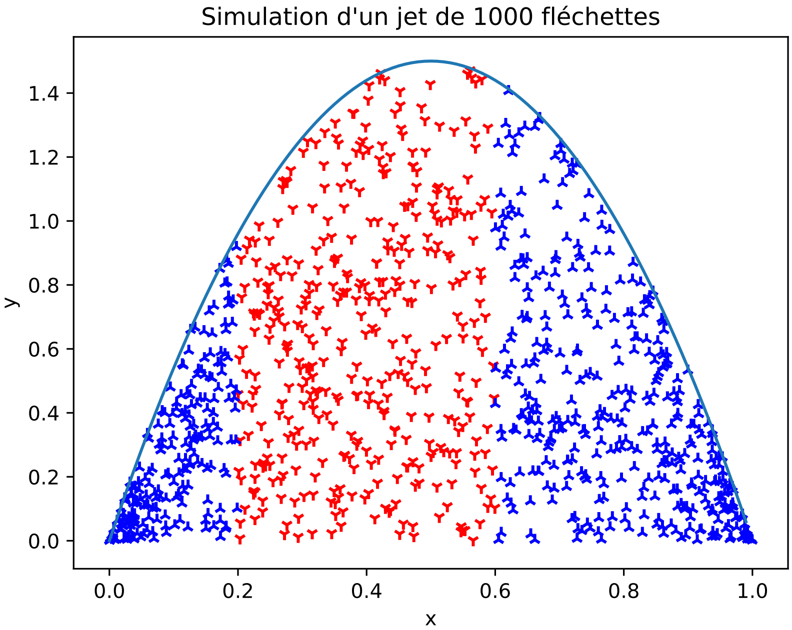
Cet événement sera réalisé chaque fois que la flèche tombe dans la zone hachurée. On peut alors construire la probabilité de E en considérant le rapport des deux aires :

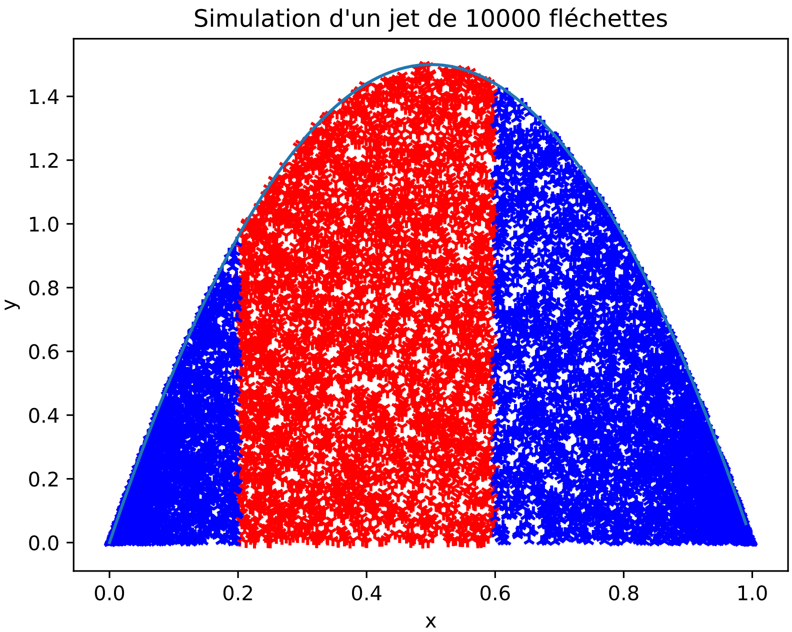
- A_E, l'aire de la partie hachurée,
- A, l'aire de la partie située sous la courbe ,au dessus de l'axe des abscisses entre les valeurs 0 et 1.

Or , d'une part $A = \int_0^1 f(x)\,dx$ et d'autre part $A_E = \int_{0,2}^{0,6} f(x)\,dx$.Un calcul rapide[✍] donne :

$$A = 1 \text{ et } A_E = 0,544$$

Ainsi, la probabilité de l'événement E est-elle : $p(E) = 0,544$.





✍. Une primitive F de f est $F(x) = 3x^2 - 2x^3$

On a donc défini une loi de probabilité sur un univers infini (car x peut prendre une infinité de valeurs) par la relation :

$$p(x \in [c\,;d]) = \int_c^d f(x)\,dx \text{ où } 0 \leq c < d \leq 1$$

Définition

Soit $I = [a;b]$ un intervalle borné de réels avec $a < b$. On considère une fonction f positive sur I telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 1$. On définit une loi de probabilité sur l'intervalle I de tout intervalle $J = [c;d]$ inclus dans I par :

$$p(x \in [c;d]) = \int_c^d f(x)\,dx$$

À chaque intervalle J inclus dans I, on attribue donc un réel positif p_J tel que :

- $0 \leq p_J \leq 1$
- $\displaystyle\sum_{\cup(J \subset I)} p_J = 1$

Définition

La fonction f ainsi définie s'appelle **densité** de la loi de probabilité sur l'intervalle I.

La distribution des probabilités n'est plus discrète mais continue. Cela justifie le nom de loi de probabilité continue.

Exercice 1

Quelle doit être la valeur du coefficient a pour que la fonction f définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = \frac{ax}{1+x^2}$$

soit une densité de probabilité sur $[0;1]$?

1.2 Exemples de lois continues

On se propose ici de découvrir deux situations qui permettent de construire deux fonctions de densité, c'est-à-dire deux nouvelles lois.

1.2.1 Loi uniforme

Un camarade choisit ,un nombre entier entre 1 et 10. Dans ce cas,la probabilité de retrouver son nombre est de 0.1 (une chance sur dix). En revanche, s'il choisit un nombre **réel** entre 1 et 10 ,la probabilité de le retrouver est quasiment nulle.
La question est alors comment modéliser le tirage aléatoire d'un nombre d'un intervalle I ?
On considère un intervalle $I = [a; b]$.Pour tout nombre x dans I, on considère un intervalle $J = [c; d]$ inclus dans I et contenant x.On construit une loi de probabilité sur I en calculant le rapport des longueurs des intervalles J et I. Ainsi :

$$p(x \in J) = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I} = \frac{d-c}{b-a}$$

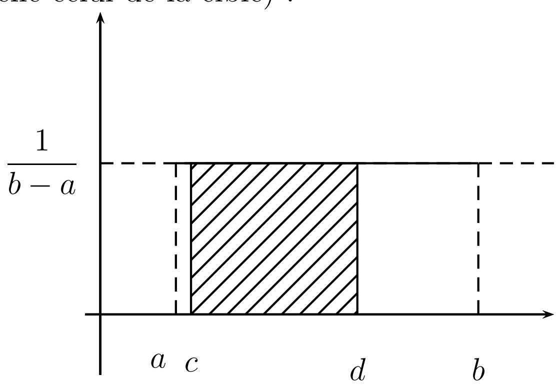
Plus J est grand, plus p se rapproche de 1 et plus l'événement $x \in J$ a de chances de se produire.Inversement,plus J est petit, moins l'événement précédent a de chances de se produire. La loi ainsi construite est **la loi uniforme sur** I.On peut la considérer comme la loi équirépartie pour les lois continues.

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ $(a < b)$ lorsque sa densité de probabilité f est la fonction constante égale à $\dfrac{1}{b-a}$.

En effet, si $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ pour $x \in [a; b]$ alors ,
$p(x \in [c; d]) = \displaystyle\int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{b-a}$ avec $p(x \in [a; b]) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$.
On illustre la situation par le schéma ci-contre (qui rappelle celui de la cible) :

Sur un intervalle $[a; b]$, la fonction de densité de la loi uniforme est $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$. La probabilité que X soit dans un intervalle $[c; d]$ est égal à l'aire de la partie hachurée.



Exercice 2

On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[5;20]$. La variable X égale au nombre choisi, suit la loi uniforme sur $[5;20]$.On considère les événements $A = (X > 10)$, $B = (12 \leq X \leq 16)$ et $C = (8 \leq X \leq 13)$. Alors :

- $p(A) = \dfrac{20-10}{20-5} \approx 0,67$, $p(B) = \dfrac{16-12}{15} \approx 0,27$ et $p(C) = \dfrac{5}{15} \approx 0,33$
- $p(\bar{A}) = p(X \leq 10) = 1 - p(A) \approx 0,33$
- $p(B \cup C) = p(B) + p(C) - p(B \cap C) = \dfrac{4}{15} + \dfrac{5}{15} - \dfrac{1}{15} = \dfrac{8}{15}$

Pour rappeler que les formules connues fonctionnent encore avec les lois continues.

Définition

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur l'intervalle $[a;b]$ est :

$$E(X) = \int_a^b x\,f(x)\,dx$$

L'espérance est la moyenne des valeurs prises par X lorsqu'on réitère un grand nombre de fois l'expérience dont est issue X.Pour la loi uniforme on a le résultat suivant :

Propriétés

Si X suit la loi uniforme sur $[a;b]$ alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

C'est la moyenne arithmétique de a et b. On démontre ce résultat par un calcul intégral simple. En effet si X suit la loi uniforme sur $[a;b]$ alors $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ et :

$$E(X) = \int_a^b x\,f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}[\frac{x^2}{2}]_a^b = \frac{a+b}{2}$$

Mais cela semble encore une fois très cohérent...

1.2.2 Loi exponentielle

Les lois exponentielles modélisent les phénomènes dont la durée de vie ne dépend pas de l'âge, comme par exemple celle d'un atome radioactif. Cette propriété est connue sous le nom de « durée de vie sans vieillissement ». Elle s'exprime par le relation probabiliste :

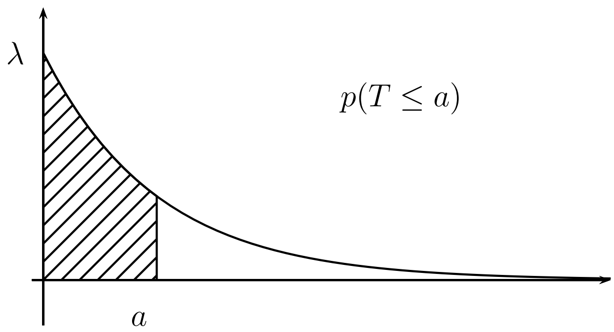
$$P_{X\geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h) \text{ pour tous } t \text{ et } h \text{ positifs ou nuls.}$$

En d'autres termes, le probabilité que X dépasse le temps $t+h$ sachant que X a déjà dépassé le temps t est la même que la probabilité que X dépasse h quelque soit t et h.
Cette loi ne s'applique bien sûr pas à nous les humains... la probabilité de vivre un an de plus diminue avec l'âge !
On démontre que les variables aléatoires qui suivent une loi exponentielle sont les seules qui modélisent une durée de vie sans vieillissement.

Définition

On considère un réel positif λ. La **loi exponentielle** est la loi de probabilité d'une variable aléatoire T définie sur $[0;+\infty[$ par la fonction de densité $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

Une fonction de densité d'une loi exponentielle est toujours décroissante ($\lambda > 0$)



On a ainsi d'après les définitions précédentes :

$$p(T \in [c;d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\, dt = e^{-c\lambda} - e^{-d\lambda}$$

En faisant tendre d vers $+\infty$, on obtient :

$$p(T \in [c;+\infty]) = p(T \geq c) = \int_c^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = e^{-c\lambda}$$

$$\text{ou encore, } p(T \leq c) = \int_0^c \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1 - e^{-c\lambda}$$

Exercice 3

La durée de vie d'un composant électronique, exprimée en années, est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.
La probabilité que le composant dure moins de 8 ans est alors :

$$p(T \leq 8) = \int_0^8 0,2e^{-0.2t}\,dt = 1 - e^{-8\times 0,2} \approx 0,798$$

La probabilité que le composant dure plus de 10 ans est alors :

$$p(T \geq 10) = \int_{10}^{+\infty} 0,2e^{-0.2t}\,dt = e^{-10\times 0,2} \approx 0,135$$

Propriétés

Soit T une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Alors :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

En reprenant l'exemple précédent, $E(T) = \dfrac{1}{0,2} = 5$. Donc en moyenne sur un grand lot de composants, la durée de vie est de 5 ans.
<u>Démonstration :</u> Il s'agit de calculer dans un premier temps l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha x\lambda e^{-\lambda x}dx$ et de calculer $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$.
Posons $g(x) = x\lambda e^{-\lambda x}$. La fonction g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on a :

$$g'(x) = \lambda e^{-\lambda x} - \lambda^2 x e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x} - \lambda g(x)$$

d'où :

$$g(x) = \frac{1}{\lambda}(\lambda e^{-\lambda x} - g'(x))$$

Ainsi : $I(\alpha) = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^\alpha (\lambda e^{-\lambda x} - g'(x))dx = \dfrac{1}{\lambda}(-e^{-\lambda\alpha} - \lambda\alpha e^{-\lambda\alpha} + 1)$ après calculs.
Avec $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} -\lambda\alpha e^{-\lambda\alpha} = 0$ ✍ et $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} e^{-\lambda\alpha} = 0$, il vient $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = \frac{1}{\lambda}$

✍. Voir puissances comparées d'une exponentielle et d'un polynôme

Section 2

Loi normale centrée réduite

Dans cette section, on étudie plus précisément la loi normale dans un cas particulier. On généralisera par la suite.

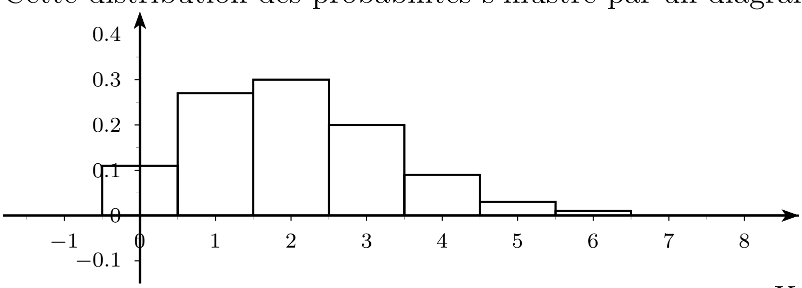
2.1 Convergence de la loi binomiale

On rappelle que si une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors :

Propriétés

- X prend les valeurs entières de 0 à n ;
- pour $0 \leq k \leq n$, $p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$;
- $E(X) = n \times p$ et $V(X) = n \times p \times (1-p)$

Cette distribution des probabilités s'illustre par un diagramme en barres :



Répétition de n épreuves identiques et indépendantes les unes des autres, à deux issues possibles, l'un étant appelée le succès de probabilité p. Illustration du cas $n = 10$ et $p = 0.2$. La hauteur des barres donnent la probabilité des événements $X = k$

On considère la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Calculons l'espérance puis la variance de Z.
L'espérance est linéaire✍ donc :

$$E(Z) = E(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}) = \frac{E(X)-E(np)}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{np-npE(1)}{\sqrt{np(1-p)}} = 0 \text{ car } E(1) = 1$$

et :

$$V(Z) = V(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}) = \frac{V(X)}{np(1-p)} = 1 \text{✍}.$$

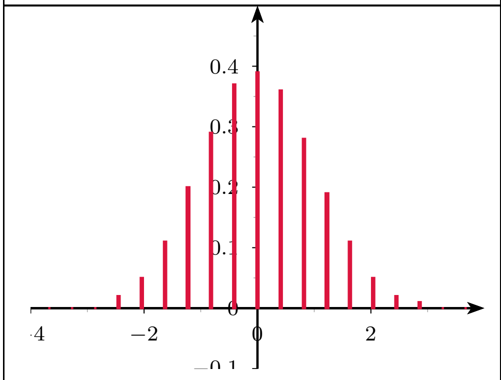
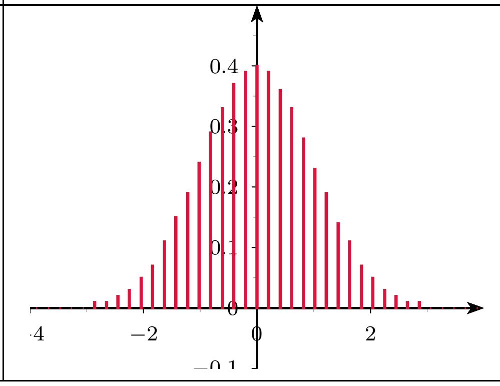
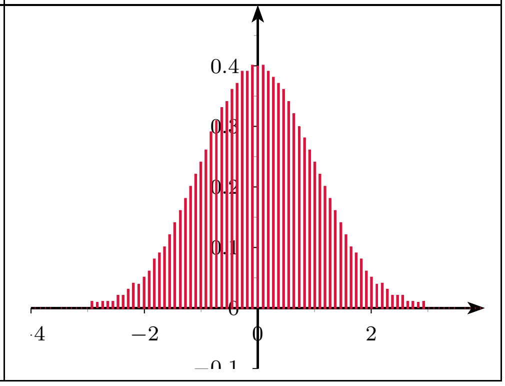
En conclusion Z a une espérance nulle et un écart-type égal à 1.

✍. Pour tous réels a et b, $E(aX+b) = aE(X)+b$
✍. Pour tous réels a et b, $V(aX+b) = a^2V(X)$

Définition

La variable Z est dite centrée réduite.

Quand les valeurs de X décrivent l'ensemble des entiers $\Omega = \{0, 1, 2, ..., n\}$ les valeurs de Z décrivent l' l'ensemble des nombres réels $\{\frac{-np}{\sigma}, \frac{1-np}{\sigma}, \frac{2-np}{\sigma}, ..., \frac{n-np}{\sigma}\}$ où $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.
Ci-dessous, on donne le diagramme en barres de la variable Z pour différentes valeurs de n.

$n = 25$	$n = 100$	$n = 500$
		

Plus n est grand, plus les diagrammes dessinent une aire délimitée par une courbe « en cloche », appelée **courbe de Gauss**.On démontre que cette courbe est la courbe représentative de la fonction Φ définie pour tout réel x par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

La loi de probabilité discrète de la variable X (loi binomiale) devient une loi continue lorsque n devient grand de la variable Z. Cette loi dont la fonction de densité est la fonction Φ, est la **loi normale centrée réduite**.Cette convergence d'une loi vers une autre constitue le théorème suivant.

Théorème de Moivre Laplace

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On pose : $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Alors pour tous réels a et b, avec $a < b$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} p(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \Phi(t)\, dt$$

où Φ est la fonction de Gauss définie ci-dessus.

La démonstration est hors programme et repose sur une approximation (dite de Stirling).

2.2 La loi $\mathcal{N}(0,1)$

Définition

La loi normale centrée réduite est la loi continue dont la fonction de densité est la fonction de Gauss Φ.

Ainsi,dans le cas où X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, $p(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b \Phi(t)\,dt$.

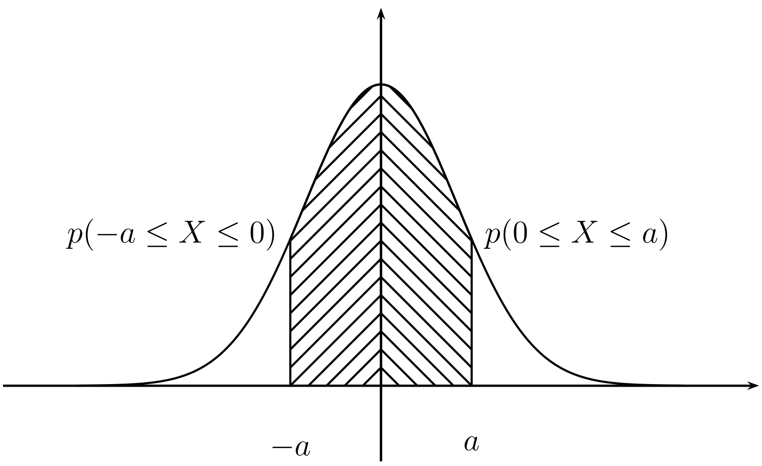
En pratique le calcul intégral précédent est impossible car on ne connaît pas une primitive explicite de la fonction Φ. On utilise les fonctionnalités des calculatrices qui permet par divers algorithmes d'en déterminer une valeur approchée. ✍.

Propriétés

En utilisant notamment la symétrie de la courbe,pour tout réel a :

- $p(-a \leq X \leq 0) = p(0 \leq X \leq a)$;
- $p(X \leq a) = 1 - p(X \geq a)$

Les probabilités des événements ci-dessus peuvent toujours s'interpréter en termes d'aires :



✍. Voir cours sur le calcul intégral

Exercice 4

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
À la calculatrice, on trouve $p(X < 0.62) \approx 0.7324$.Alors on peut en déduire :

- $p(0 < X < 0.62)$ car $p(0 < X < 0.62) = p(X < 0.62) - 0.5 = 0.2324$;
- $p(X > -0.62)$ car $p(X > -0.62) = p(X < 0.62) = 0.7324$;
- $p(X \geq 0.62)$ car $p(X \geq 0.62) = 1 - p(X < 0.62) = 0.2676$.

Exercice 5

On considère la variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(70; 0,7)$. On pose $Z = \dfrac{X - 49}{\sqrt{14,7}}$.
D'après le théorème de Moivre Laplace, considérant que le nombre n d'essais est assez grand, Z suit la loi normale centrée réduite.
Déterminons $p(46 \leq X \leq 60)$, c'est-à-dire la probabilité que le nombre de succès soit compris entre 35 et 60.On a :
$p(46 \leq X \leq 60) = p(\dfrac{46 - 49}{\sqrt{14,7}} \leq Z \leq \dfrac{60 - 49}{\sqrt{14,7}}) \approx p(-0,782 \leq Z \leq 2,869) \approx 0,7808$.

Théorème

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Alors pour tout réel α dans $]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que :

$$p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Démonstration :D'après la symétrie de la courbe,on a :

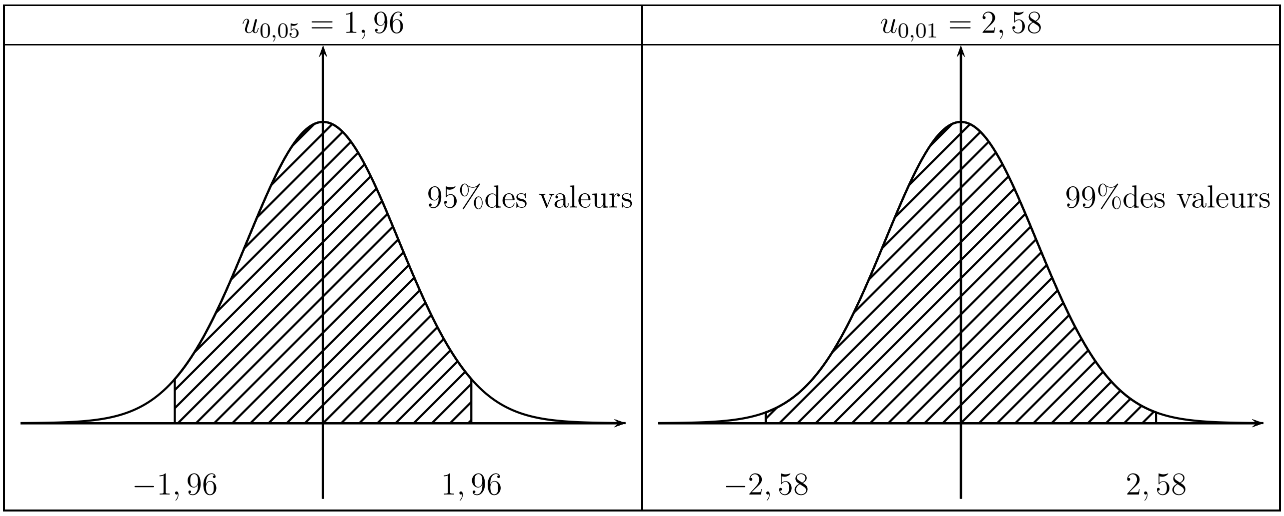
$$p(-u \leq X \leq u) = 2p(0 \leq X \leq u) = 2\int_0^u \Phi(x)dx = 2H(u)$$

où H est une primitive de Φ qui s'annule en 0.La fonction H est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ avec $\lim\limits_{u \to +\infty} H(u) = \dfrac{1}{2}$.On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

u	0		$+\infty$
$2H(u)$	0	$\nearrow$	1

Lorsque α appartient à $]0;1[$, $1-\alpha$ aussi. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique u_α dans $[0; +\infty[$ tel que $2H(u_\alpha) = 1 - \alpha$, c'est-à-dire, $p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Il faut en particulier retenir deux valeurs particulières de α, données par le tableau ci-dessous :



Section 3

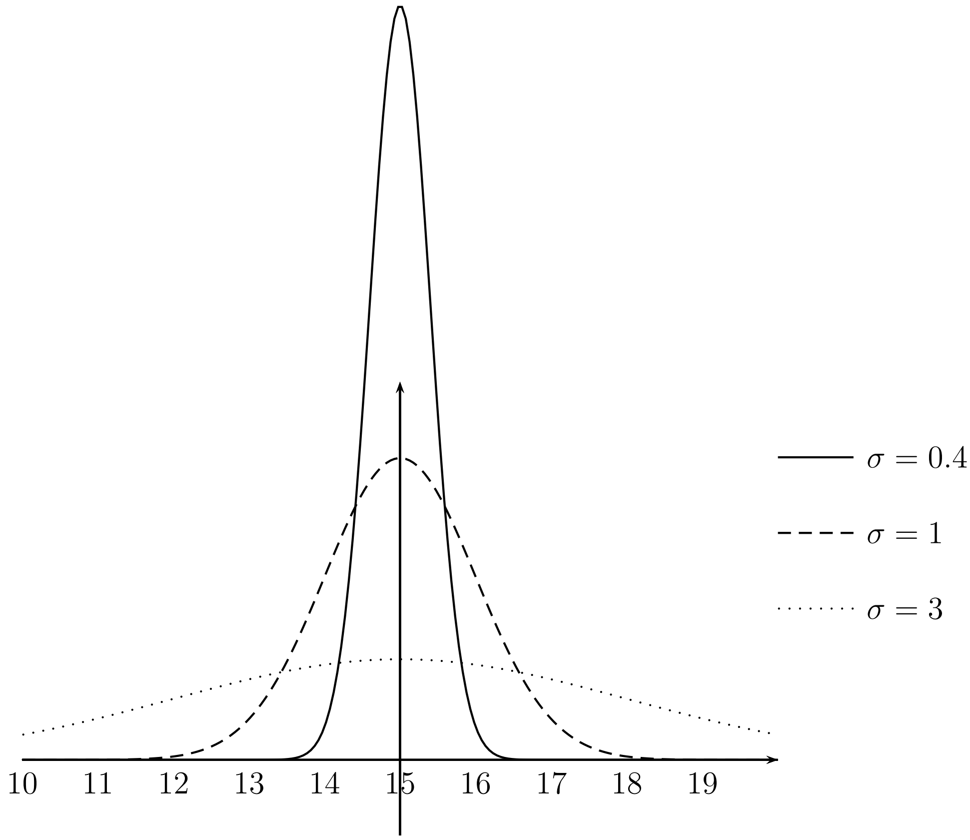
La loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Il s'agit de généraliser la notion de loi normale.

Définition

On considère un réel μ et un réel strictement positif σ.
On dit qu'une variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si la variable centrée réduite $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Dans ce cas, l'espérance de X est μ et son écart-type est σ.



Pour une même moyenne $\mu = 15$, on voit l'évolution de la forme de la courbe en cloche selon les différentes valeurs de σ.
Les lois normales à l'origine permettent de modéliser de nombreuses études biométriques.Il faut comprendre que pour une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, plus la variable est proche de la valeur de μ, plus la probabilité de son apparition est grande. La dispersion des valeurs est précisée par σ.
En pratique, pour calculer la probabilité d'un événement imposé à la variable X qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on utilise les fonctionnalités de la calculatrice .

Exercice 6

On suppose que $X \sim \mathcal{N}(4, 2^2)$. Calculons la probabilité des événements suivants :

$$(X \leq 5), (3.5 \leq X \leq 4.5) \text{ et } (X > 6)$$

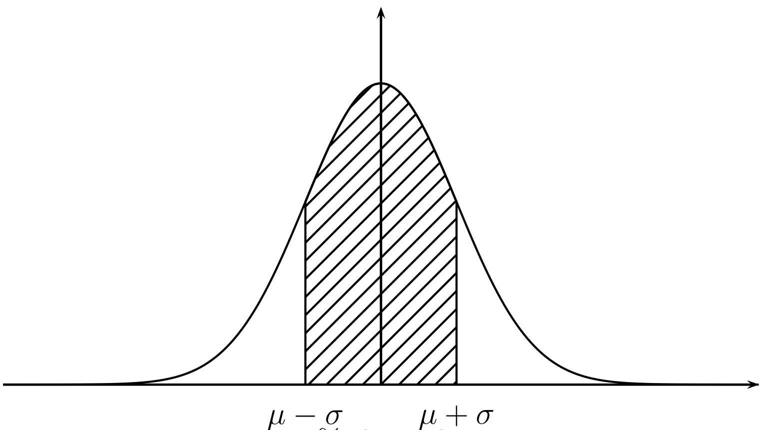
À la calculatrice, on obtient : $p(X \leq 5) \approx 0,6915$,$p(3.5 \leq X \leq 4.5) \approx 0,1974$ et $p(X > 6) = 1 - p(X \leq 6) \approx 0,1587$

Propriétés

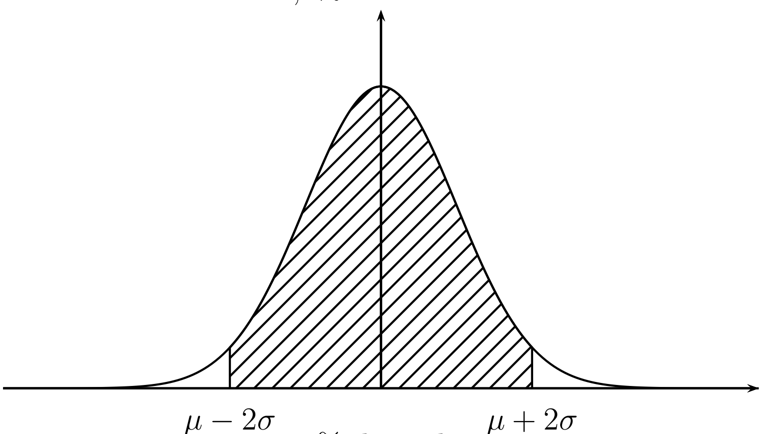
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Alors :

- $p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$
- $p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$
- $p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

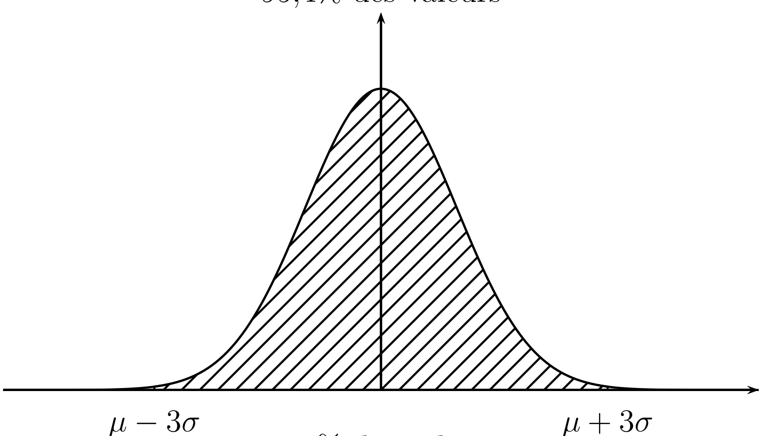
Cette propriété est connue sous le nom des « 1,2,3 sigma » .



68,5% des valeurs



95,4% des valeurs



99,7% des valeurs