Table des matières

Section 1

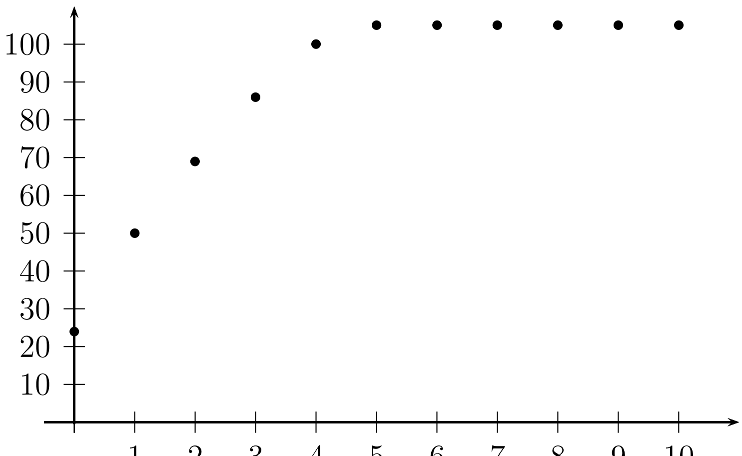
Définitions des fonctions

Une fonction f est une transformation qui à une variable lui associe une et une seule valeur, appelée image.Elles servent dans des secteurs divers à exprimer le lien qui existe entre deux grandeurs : on parle alors de **modélisation**.
Souvent la fonction a une seule variable, de type numérique, mais plusieurs exercices étudieront par exemple des fonctions à plusieurs variables [1].
En seconde, on sait qu'une fonction peut se présenter sous diverses formes :

- un tableau de valeurs ; les résultats d'une expérience sont donnés en général sous cette forme.
- une courbe ; elle donne une meilleure lisibilité sur le lien qu'il existe entre les deux grandeurs liées par cette fonction.
- une formule du type $f(x) = 2 - 0.25x^2$; x désigne la variable et $f(x)$ son image. Mais les variables sont plus explicites lorsque on étudie des grandeurs physiques (temps(t),pression ou prix (p) mais aussi quantité (q)...)

Lorsque on obtient un tableau de valeurs, on peut placer dans un repère du plan les points dont les coordonnées sont données par le tableau :

Temps (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Température (°C)	24	50	69	86	100	105	105	105	105	105	105
Etat de l'eau	L	L	L	L	L	L+G	L+G	L+G	L+G	L+G	L+G



Le nuage de points donne une idée de l'évolution de la température en fonction du temps. En interpolant ce nuage par un trait, on obtient la **courbe représentative** de la fonction qui donne T en fonction de t.

1. On se limitera dans un premier cas à des fonctions de la variable réelle.

Le passage à la formule est plus compliqué !

Définition

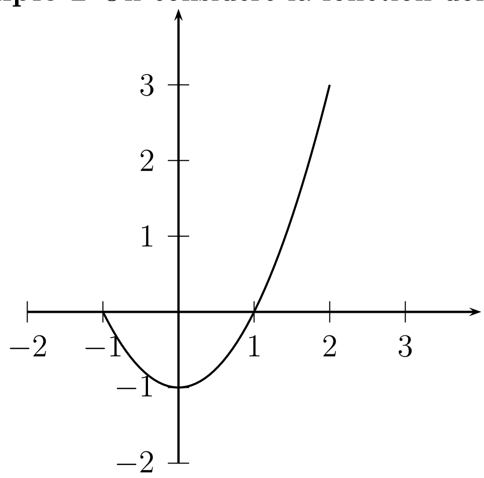
L'image d'une variable est le résultat obtenu après transformation par la fonction f.

L'image peut ne pas exister si la fonction n'est pas définie pour la valeur dont on cherche l'image.

Exemple 1 On considère la fonction f définie sur $I = [0;2]$ par $f(x) = 3x - 1$. Alors :

— L'image de 0 est $f(0) = -1$;
— L'image de 0.5 est $f(0.5) = 0.5$;
— L'image de 3 ...n'existe pas ! car la fonction n'est définie que sur $[0;2]$.

Exemple 2 On considère la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. Alors :



— l'image de 2 est 3
— l'image de 0 est -1
— les images de 1 et -1 sont égales à 0.

L'antécédent d'un nombre y s'il existe, est un nombre x dont l'image est ce nombre. Autrement dit s'il existe, on a $y = f(x)$.
La recherche d'un antécédent peut être fastidieuse si la fonction est présentée sous la forme d'une formule. Il faut en effet résoudre une équation pour le rechercher.

Exercice 1 Déterminer un antécédent de 5 par la fonction f définie par $f(x) = 6 - 4x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Définition

Une fonction est dite croissante(resp.décroissante) sur un intervalle I si elle conserve (resp. change) l'ordre sur cet intervalle et réciproquement.

Un peu de formalisme ! Soit deux valeurs x_1 et x_2 dans un intervalle I tels que $x_1 < x_2$. Si f est croissante sur I alors $f(x_1) < f(x_2)$.De même si **pour toutes valeurs** x_1 et x_2 dans I telles que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$ alors on prouve que la fonction f est croissante sur I.

Démontrer les variations d'une fonction sur un intervalle I

On utilise le formalisme ci-dessus même si cela peut s'avérer difficile selon les fonctions proposées.

Exemple 3 Démontrer que la fonction f définie par :

$$f(x) = 4 - 2x$$

est décroissante sur $I = [-3; 4]$.
Considérons deux valeurs x_1 et x_2 dans I telles que $x_1 < x_2$. Alors successivement :

$$\begin{aligned} 2x_1 &< 2x_2 \text{ car la multiplication par 2 ne change pas l'ordre} \\ -2x_1 &> -2x_2 \text{ car deux nombres et leurs opposés ne sont pas rangés dans le même ordre} \\ 4-2x_1 &> 4-2x_2 \text{ car ajouter un nombre ne change pas l'ordre} \end{aligned}$$

Donc $f(x_1) > f(x_2)$ si $x_1 < x_2$. La fonction est donc décroissante sur I.

Exercice 2 On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{2x+5}{x+1}$$

1 Démontrer que pour tout x , la fonction g peut s'écrire pour tout x :

$$g(x) = 2 + \frac{3}{x+1}$$

2 En utilisant cette forme, démontrez que la fonction g est décroissante sur $I = [0; +\infty[$.

3 L'est-elle sur $\mathbb{R}$?

Pour présenter les variations d'une fonction f sur un intervalle I, on donne le **tableau de variations** de la fonction. Des exemples :

x	-5		-2		4
			4		
$u(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	-1				0

x	$-\infty$		0		2
	1		‖ $+\infty$		
$v(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	
		$-\infty$	‖		$-\infty$

Exercice 3 En considérant le tableau de variations de la fonction u ci-dessus, dresser sans justifications le tableau de variations des fonctions $u(x) + 2, 3 \times u(x), -u(x)$ puis $\dfrac{1}{u(x)}$.

Section 2

Les fonctions de références, compléments

En troisième puis en seconde, a débuté la découverte des fonctions de références, celles les plus usitées.

2.1 La fonction constante

Quelle que soit sa valeur, la variable est toujours transformée en le même nombre constant. La fonction f définie pour tout x par :

$$f(x) = 3$$

est un exemple de fonction constante.

2.2 La fonction linéaire

Liée à la proportionnalité, elle se caractérise par la présence d'un nombre a tel que :

$$f(x) = ax$$

Sa courbe représentative est une droite passant par l'origine du repère.

2.3 la fonction affine

Caractérisée par le couple (a, b) qui permet d'écrire :

$$f(x) = ax + b$$

elle est la fonction dont la courbe représentative est une droite et réciproquement [2].

2.4 La fonction carrée

Fonction qui à une valeur lui associe son carré. Elle permet de générer toute une famille de trinômes dont les courbes représentatives sont des paraboles. [3]

2.5 La fonction inverse

C'est la première fonction qui présente une **valeur interdite**, une valeur pour laquelle on ne peut pas déterminer l'image. En effet 0 n'a pas d'inverse !
Sa courbe représentative possède alors une discontinuité caractéristique de ces valeurs interdites.
Soit $x > 0$. Remarquons que plus x est grand plus son inverse $\dfrac{1}{x}$ est petit ; c'est une autre façon de caractériser la décroissance de la fonction inverse.

2.6 La fonction racine

Définie uniquement pour $x \neq 0$, elle associe à un nombre positif sa racine carrée.On a :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

2. à condition que la droite ne soit pas verticale !
3. Un chapitre entier est voué à l'étude des trinômes.

Propriété

La fonction racine est décroissante sur $[0;+\infty[$

L'exercice suivant permet de démontrer cette affirmation.

Exercice 4 :Soit f la fonction racine.

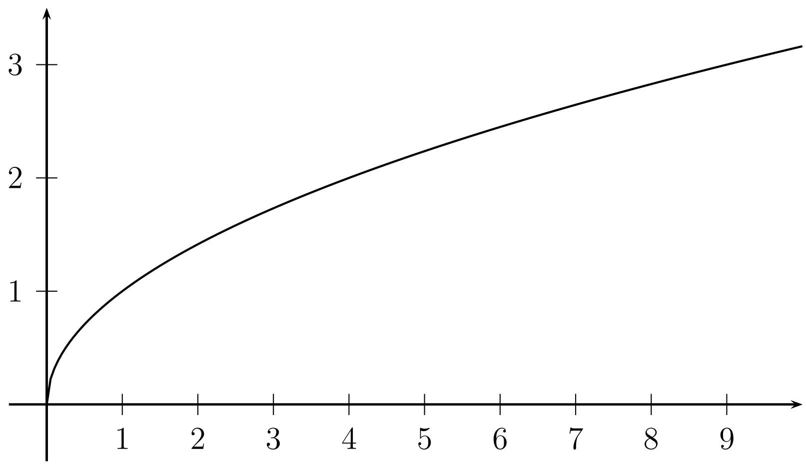
1 Démontrer que pour tout x_1 et x_2, on a :

$$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$$

2 En déduire le signe de $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$ si $x_1 < x_2$.

3 Conclure.

La courbe représentative de la fonction racine est une demi-parabole :



Exercice 5

1 Un nombre peut-il être plus petit que son carré ?

2 À l'aide de la calculatrice construire dans un même repère les courbes représentatives des fonctions f, g et h définies pour $x > 0$ respectivement par $f(x)=x^2, g(x)=\sqrt{x}$ et $h(x)=x$.

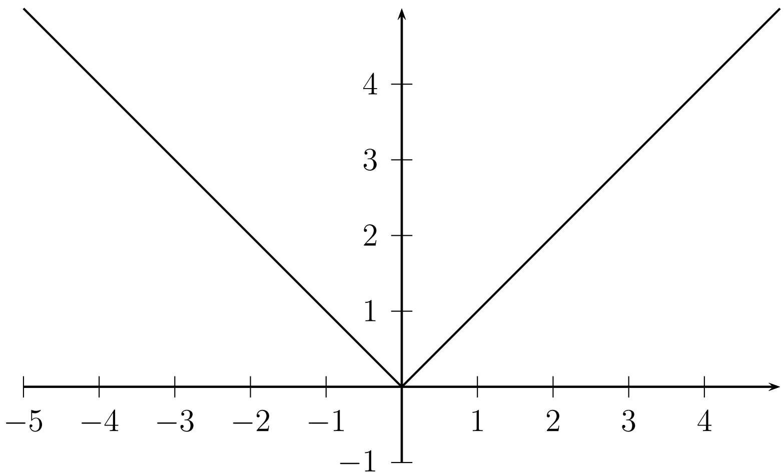
3 Avec les renseignements fournis par le graphique, comparer selon la valeur de x, sa racine et son carré.

2.7 La fonction valeur absolue

Cette fonction transforme un nombre en lui-même s'il est positif et en son opposé sinon.On écrit :

$$f(x)=\mid x\mid=\begin{cases}-x & \text{si } x \text{ est négatif}\\ x & \text{si } x \text{ est positif}\end{cases}$$

La courbe représentative de la fonction racine est une demi-parabole :



Exercice 6

1 (a) À quelle condition l'expression $2x - 4$ est-elle négative ?

(b) Donner sans parenthèses l'expression de l'opposé de $2x - 4$.

(c) En déduire sans valeur absolue ni parenthèses, les expressions possibles de la fonction f définie par : $f(x) = \mid 2x - 4 \mid$

2 En s'inspirant de la méthode précédente, donner selon la valeur de x, l'expression de la fonction g définie par : $g(x) = \mid x - 1 \mid + \mid 5 - 2x \mid$.
On présentera le résultat dans un tableau.

Section 3

Les fonctions associées

Définition

Soit u une fonction. Les fonctions associées à u sont les fonctions obtenues à partir de u par des opérations arithmétiques simples.

Quelques règles à retenir :

Variations des fonctions associées

1 Les fonctions u et $k \times u$ ont les mêmes variations si $k > 0$ et des variations contraires si $k < 0$

2 Les fonctions $u(x)$ et $u(x + k)$ ou $u(x) + k$ ont les mêmes variations quelque soit k.

Exercice 7 Dans le même repère construire les courbes représentatives des fonctions $u(x)-1, 2\times u(x), -u(x), u(x-2)$ puis $\mid u(x) \mid$.