# Mathématiques en première S
# Second degré

## Table des matières

# 1 Introduction

La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où $a$ et $b$ sont deux réels ($a \neq 0$), est une fonction affine. Sa courbe représentative est une droite.
Il existe une seule valeur de $x$ pour laquelle $f(x) = 0$ ; elle s'exprime en fonction des coefficients $a$ et $b$ et vaut $x_0 = -\frac{b}{a}$.
De plus, la fonction $f$ change de signe autour de cette valeur de $x_0$ selon le principe suivant :
Si $a > 0$,la fonction $f$ définie par $f(x) = ax+b$ est positive si $x > -\frac{b}{a}$ et négative si $x < -\frac{b}{a}$. Si $a < 0$ on constate une inversion du signe de $f$.
Enfin la croissance de la fonction $f$ est donnée par le signe du coefficient $a$.
L'objectif de cette leçon est de reproduire cette étude exhaustive de la fonction affine $f$, aux fonctions du second degré, c'est-à-dire aux fonctions $f$ qui peuvent s'écrire sous la forme :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b$ et $c$ sont trois nombres réels, $a$ étant non nul[✍] .

# 2 La forme canonique

Soit $f$ une fonction de second degré. On prend l'habitude de nommer une telle fonction un **trinôme**. Il existe un élément central qui permet de justifier du signe,des valeurs qui annulent $f$ ,des variations de la fonction $f$ ou encore de l'allure de sa courbe représentative ; cet élément se nomme **forme canonique de** $f$.
En première démonstration, je propose d'établir (et donc de définir !) la forme canonique d'une fonction trinôme c'est-à-dire d'une fonction $f$ qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b$ et $c$ sont trois nombres réels, $a$ étant non nul.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$
$$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$
$$f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a})$$
$$f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2})$$

**Définition 1** *La forme canonique d'un trinôme est :*$f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2})$

De toutes les formes que peut prendre $f$ il en existe une où apparaît une et une seule fois la variable $x$ ; c'est la forme canonique de $f$. Elle permet de justifier **tous** les résultats qui figurent dans ce cours.
Quelques exemples :

- $f(x) = 2x^2 - 4x + 14 = 2((x - 1)^2 + 6)$
- $f(x) = 3x^2 + 24x + 36 = 3((x + 4)^2 - 4)$
- $f(x) = 5x^2 + 20x + 20 = 5(x + 2)^2$

Etablir la forme canonique d'un trinôme $f$ est d'une virtuosité algébrique reconnue. Il faut certes comprendre comment l'obtenir mais il est essentiel de comprendre en quoi cette forme permet de répondre à toutes les interrogations ci-dessus.
Sur un exemple, je propose donc à partir de la forme canonique d'un trinôme de déterminer :

1. Les valeurs éventuelles de $x$ qui annulent $f$ ;
2. le signe de $f$ suivant les valeurs de $x$ ;

✍. Sinon, il n'y aurait pas de second degré !

3. les variations de la fonction $f$ ;
4. l'allure de la courbe représentative de $f$.

On considère donc le trinôme $f$ définie par :

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 16$$

La forme canonique de $f$ est : $f(x) = 2((x-1)^2 - 9)$ ✍
On reconnaît une identité remarquable qui permet la factorisation de $f$. En effet $(x-1)^2 - 9 = (x-1)^2 - 3^2 = (x-1-3)(x-1+3)$ d'où :

$$f(x) = 2(x-4)(x+2)$$

Cette factorisation permet déjà deux conclusions :

1. L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions : $x_1 = 4$ et $x_2 = -2$ selon la sacrosainte règle :*un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul* ;
2. La factorisation permet d'appliquer la règle des signes sur les produits qui permet ainsi de dresser le tableau de signe de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $2(x-4)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| signe de $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| signe de $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

De plus la forme canonique de $f$ en référence aux connaissances sur les fonctions associées permet deux autres conclusions :

1. Elle justifie comment obtenir la courbe représentative de $f$ à partir de la parabole représentative de la fonction carré.
   En effet, la courbe représentative de la fonction $f$ s'obtient par une translation (sans inversion !) de vecteur $\overrightarrow{u} = 1 \times \overrightarrow{i} - 9 \times \overrightarrow{j}$ de la parabole d'équation $y = x^2$. Rappelons que la multiplication par 2 a pour effet de "resserrer les branches de la parabole".
2. Surtout, l'allure de la courbe représentative de $f$ (déduite de celle de la fonction carrée) permet de conjecturer les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$. En fait, $f$ "garde" les variations de la fonction carrée, seules les coordonnées du sommet de la parabole représentative de $f$ changent. On a donc en résumé :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-18$ | $\nearrow$ |

## 3 Définitions

On considère un trinôme $f$ définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b$ et $c$ sont trois nombres réels, $a$ étant non nul.

**Définition 2** *On appelle discriminant de $f$, noté $\Delta$, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$*

✍. développer cette dernière expression, vous retrouverez l'expression de $f$.

On retrouve cet élément dans la forme canonique de $f$. En effet :

$$f(x) = a((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2})$$

Le signe de $\Delta$ est important ;il permet de savoir en particulier si $f$ est factorisable et donc si $f$ peut s'annuler.

**Définition 3** *On appelle racine de $f$, tout nombre réel qui annule $f$.*

Remarques :
- Si $\alpha$ est une racine de $f$ alors $f(\alpha) = 0$ ;
- On verra qu'un trinôme peut avoir deux, une ou aucune racine(s).

Par exemple $\alpha = 2$ est racine du trinôme $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$. Saurez-vous en trouver d'autres ?

## 4 Factorisation des trinômes

**Théorème 1** *Soit $f$ un trinôme et $\Delta$ son discriminant.*
- *Si $\Delta > 0$ alors $f$ est factorisable et $f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ où :*

$$\alpha_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \alpha_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si $\Delta = 0$ alors $f$ est factorisable et $f(x) = a(x-\alpha_0)^2$ où $\alpha_0 = -\frac{b}{2a}$ ;*
- *Si $\Delta < 0$ alors $f$ n'est pas factorisable et $f(x) = a \times A$ où $A$ est une quantité strictement positive quelque soit le réel $x$.*

Démonstration : Soit $f$ un trinôme du second degré. Alors $f$ peut s'écrire sous sa forme canonique $f(x) = a((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2})$.
- Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a((x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}))^2 = a(x+\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) = a(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})$. D'où le résultat.
- Si $\Delta = 0$ alors la forme canonique de $f$ devient :

$$f(x) = a((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{0}{4a^2}) = a(x-(-\frac{b}{2a}))^2.$$

  D'où le résultat.
- Enfin si $\Delta < 0$ alors $-\frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif et $A = (x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ aussi. D'où le résultat.

## 5 Racines d'un polynôme du second degré

Le théorème suivant découle directement du précédent.

**Théorème 2** *Soit $f$ un trinôme et $\Delta$ son discriminant.*
- *Si $\Delta > 0$ alors $f$ admet deux racines :*

$$\alpha_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \alpha_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si $\Delta = 0$ alors $f$ admet une unique racine :*

$$\alpha_0 = -\frac{b}{2a} ;$$

- *Si $\Delta < 0$ alors $f$ n'admet pas de racines.*

Démonstration : Si $f$ se factorise alors il existe une ou deux solutions de l'équation $f(x) = 0$. Sinon $f$ ne peut pas s'annuler.

## 6 Signe d'un polynôme du second degré

La forme canonique et le théorème de factorisation justifient encore le résultat suivant.

**Théorème 3** *Soit $f$ un trinôme et $\Delta$ son discriminant.*
- *Si $\Delta > 0$ alors $f$ change de signe autour de ses deux racines ;*
- *Si $\Delta = 0$ alors $f$ a un signe constant qui est celui du coefficient $a$ et s'annule une seule fois ;*
- *Si $\Delta < 0$ alors $f$ a un signe constant celui du coefficient $a$.*

Remarques :

- Souvent le signe d'un polynôme est donné sous la forme d'un tableau ;
- L'étude des solutions d'une inéquation du second degré se ramène bien souvent à l'étude du signe d'un trinôme.

Des exemples :

1. On considère le trinôme $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$ dont le discriminant est $\Delta = 49$. Le signe de $P$ est alors donné par le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $P(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

2. Déterminer les solutions de l'inéquation $(E) : -2x^2 + x + 5 \geq 1 - x$ ;
L'équation devient $(E) : -2x^2 + 2x + 4 \geq 0$ On remarque alors que résoudre $(E)$ revient à déterminer le signe du trinôme $P(x) = -2x^2 + 2x + 4$, donné par le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $P(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Les solutions de $(E)$ sont donc les nombres réels de l'intervalle $[-1; 2]$.

## 7 Variations d'une fonction du second degré

Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ par :

$$f(x) = (x - 1)^2 + 4$$

On sait que la courbe représentative de la fonction $f$ s'obtient par une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ de la parabole représentative de la fonction carrée. En particulier $f$ a les mêmes variations que la fonction carrée. Remarquons enfin que l'expression proposée de $f$ est la forme canonique du trinôme $f(x) = x^2 - 2x + 5$. Cet exemple montre comment la forme canonique permet de justifier :

- de la forme de la courbe représentative d'un trinôme ;
- des variations de la fonction trinôme.

**Théorème 4** *Soit $f$ un trinôme et $\Delta$ son discriminant.*

1. *La courbe représentative de $f$ est une parabole de sommet $S$ de coordonnées $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ ;*

2. *Si $a > 0$(resp.$a < 0$) alors $f$ admet un minimum(resp. un maximum)en $x = -\dfrac{b}{2a}$ qui vaut $f(-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\Delta}{2a}$.*

Démonstration : Elle repose sur la forme canonique d'un trinôme et sur la connaissance des fonctions associées.
Exemples :

1. La fonction $f$ définie par $f(x) = 5x^{-}2x + 4$ admet un minimum $(a = 5 > 0)$ en $x = -\dfrac{-2}{2 \times 5} = \dfrac{1}{5}$ ; ce minimum vaut alors :$f(\dfrac{1}{5}) = 5 \times (\dfrac{1}{5})^2 - 2 \times \dfrac{1}{5} + 4 = \dfrac{19}{5}$.
2. Le tableau de variation de la fonction $g$ définie pour tout réel $x$ par : $g(x) = -x^2 + 4x - 5$ est :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | |

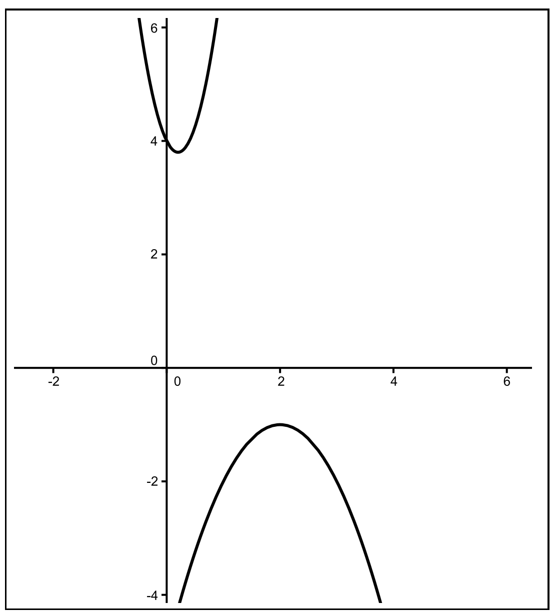
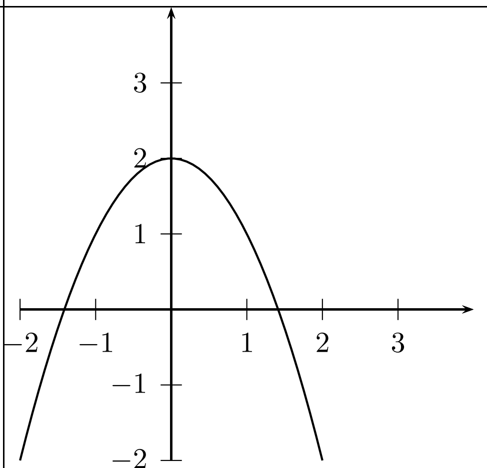
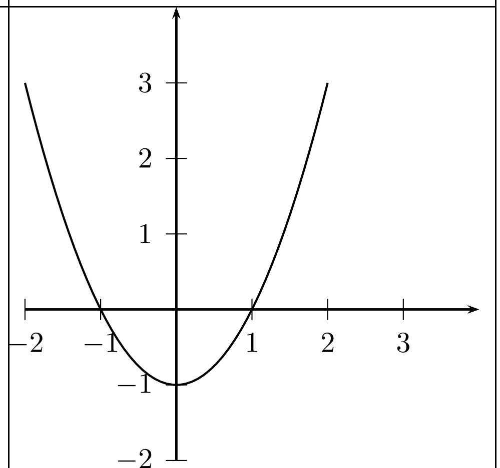
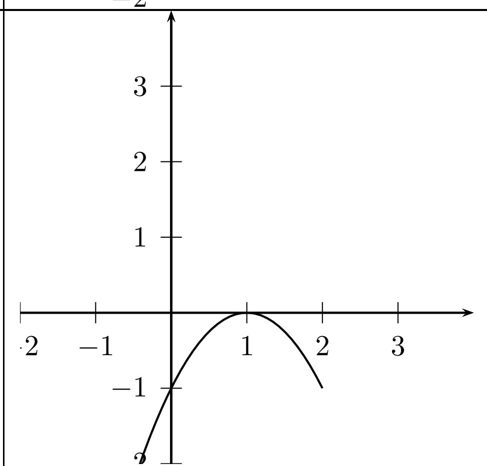
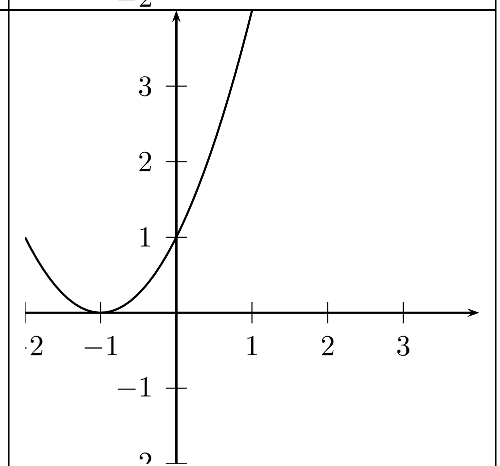
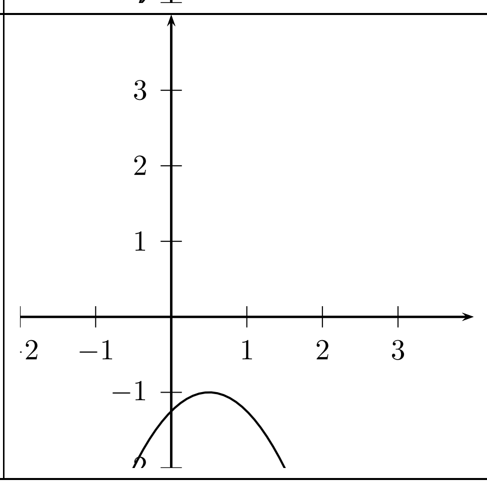
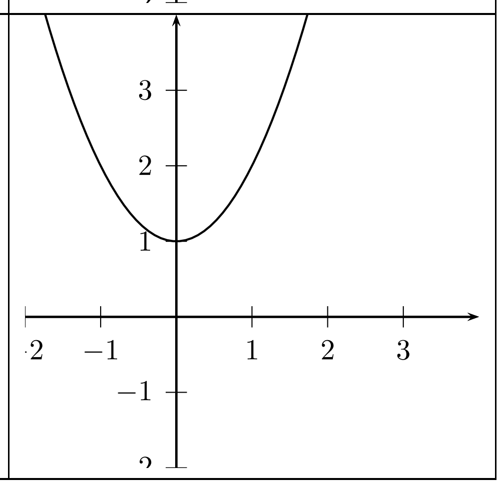



Figure 1 – Les courbes des fonctions $f$ et $g$ définies ci-dessus confirment les variations obtenues

## 8 Synthèse

Le tableau suivant synthétise les résultats précédents.

| | $a < 0$ | $a > 0$ |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ |  |  |
| $\Delta = 0$ |  |  |
| $\Delta < 0$ |  |  |