Mathématiques en première S

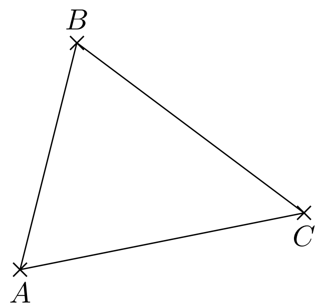
Produit scalaire dans le plan

Table des matières

Section 1

Introduction

On considère un triangle ABC. On appelle $\widehat{A}$ l'angle $\widehat{BAC}$. On pose $p = AC^2 + AB^2 - BC^2$. On sait que lorsque l'angle $\widehat{A}$ est droit alors $p = 0$. La réciproque du théorème de Pythagore affirme que p est non nul si le triangle ABC n'est pas rectangle en A. L'idée est de généraliser le théorème de Pythagore à n'importe quel triangle et d'exprimer une relation entre les longueurs des côtés de ce triangle.



Dans la suite on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.Il existe alors des points A, B et C tels que :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$$

On remarque alors que :

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \text{ et que } \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = AC, \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB \text{ puis } \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = BC.$$

Section 2

Définitions du produit scalaire de deux vecteurs du plan

Définition

On appelle produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, le **nombre** :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2)$$

Le produit scalaire n'est pas une opération interne ; le produit de deux vecteurs est un nombre.
Le produit scalaire « corrige »le défaut d'orthogonalité ; la définition donne avec les points A, B et C :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

C'est le nombre qu'il faut ajouter dans l'égalité de Pythagore pour l'exprimer dans n'importe quel triangle, rectangle ou non.

Exemple 1 On considère les points $A(1, -1), B(3, -4)$ et $C(4, 6)$ dans un repère orthonormé du plan.Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
Pour cela déterminons d'abord les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis leur norme.On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \text{ puis } \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}.$$
$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} \text{ puis } \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}.$$

Enfin,$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-1\\-10\end{pmatrix}$ puis $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-10)^2} = \sqrt{101}$.
Donc d'après la définition ci-dessus,

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|^2) = \frac{1}{2}(13 + 58 - 101) = -15$$

Définition

Dans une base **orthonormée** du plan, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x \times x' + y \times y'$$

Il suffit de calculer les normes des vecteurs donnés dans la définition pour obtenir le résultat.
C'est l'expression analytique du produit scalaire et sûrement la plus simple à utiliser.En reprenant l'exemple précédent avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 3 + (-3) \times 7 = 6 - 21 = -15$$

Nous verrons plus loin dans le cours d'autres expressions du produit scalaire de deux vecteurs. C'est d'ailleurs ce qui en fait toute sa richesse.

Section 3
Propriétés du produit scalaire

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ désignent trois vecteurs quelconques du plan et λ un nombre quelconque.

Symétrie

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$$

L'ordre n'est donc pas important.La démonstration repose sur le fait que deux vecteurs opposés ont la même norme.

Bilinéarité

$$(\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}.$$

La symétrie induit naturellement les égalités :

$$\overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \text{ et } (\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}).\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u}.$$

Outre ces formules sauvages, c'est leur mise en oeuvre qui est importante, résumée dans l'exemple suivant.

Exemple 2 Reprenons les données de l'exemple précédent. Aisément on montre que :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -15 \text{ , } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -28 \text{ et } \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 73$$

Alors on peut en déduire les produits suivants :

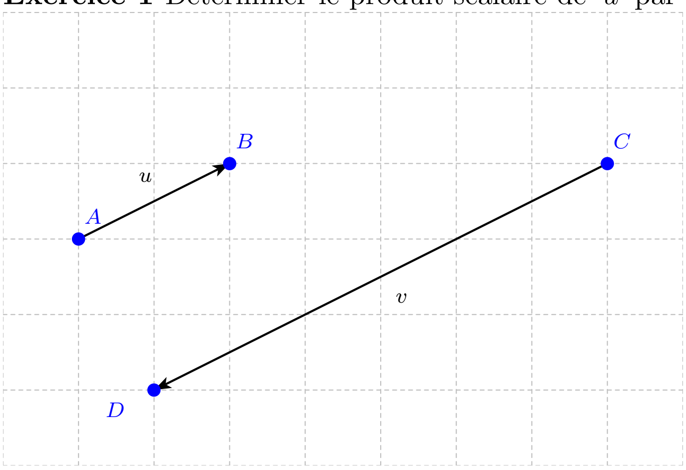
— $(2\overrightarrow{AB}).(3\overrightarrow{AC}) = 2\times 3\times \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6\times(-15) = -90$
— $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -15+(-28) = -43$
— $\overrightarrow{AC}.(4\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}) = 4\times\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}-2\times\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 4\times(-15)-2\times 73 = -206$

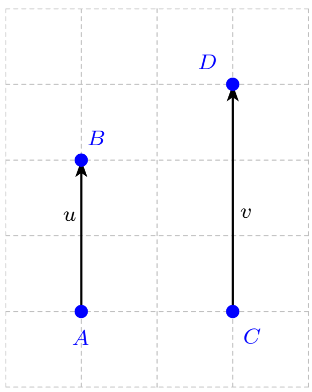
Colinéarité

Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\| \text{ si les deux vecteurs ont le même sens}$$
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|u\|.\|v\| \text{ si les deux vecteurs sont de sens contraire}$$

Exercice 1 Déterminer le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ dans les deux cas suivants :





Section 4

Orthogonalité

Définition

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si ils désignent des directions perpendiculaires.

Exemple 3 Les vecteurs suivants sont orthogonaux car ils désignent des directions perpendiculaires :

Caractérisation analytique de l'orthogonalité

Dans une repère orthonormé,
les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $x \times x' + y \times y' = 0$

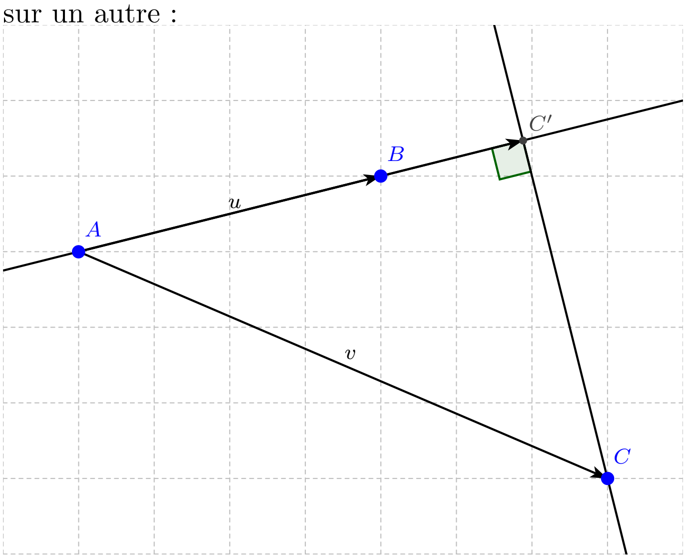
Exercice 2 Soit $A(2;8)$ et $B(-1;3)$. Donner une condition sur les coordonnées $(x;y)$ d'un point M pour qu'il se situe sur la perpendiculaire à (AB) passant par A.

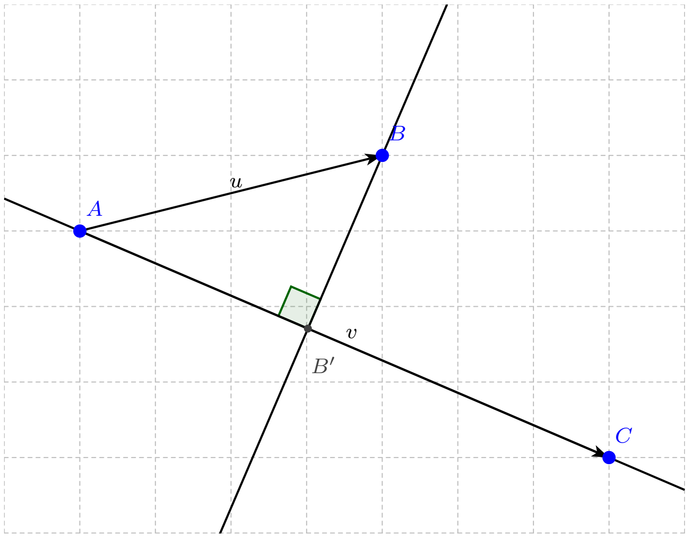
Section 5

Formules par projection

5.1 Projection orthogonale

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.Les illustrations ci-dessous illustrent la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre :





On a alors le résultat suivant :

Projection orthogonale

Le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est égal à $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v'}$,où $\overrightarrow{v'}$ est le projeté orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$.

Remarques :

— Par symétrie, on peut aussi projeté orthogonalement $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$, pour obtenir le même résultat.
— On se ramène alors au produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.

Démontrons à titre d'exercice, ce dernier résultat.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'C}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'C}$$

Or ce dernier produit $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'C}$ est nul car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'C}$ sont par construction, orthogonaux.D'où :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} = AB \times AC'$$

car ces deux derniers vecteurs sont colinéaires et de même sens ici.

5.2 Formule du cosinus

Cette formule est une conséquence directe du dernier résultat.

Formule du cosinus

Soit les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et θ l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$. Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\theta$$

L'égalité $\left\|\overrightarrow{v'}\right\| = \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta$ justifie cette relation.

Exercice 3 On considère les points $A(5;2), B(0;-1)$ et $C(1;3)$. L'objectif est le calcul approché de l'angle $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$.

❶ Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. En déduire la valeur de $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.
❷ Déterminer les normes des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.En déduire la valeur exacte de $\cos\alpha$.
❸ En déduire une valeur approchée de α.

Section 6
Applications

6.1 Equations de droites et de cercles

6.1.1 Droites :

On appelle **vecteur normal** à une droite d tout vecteur dont la direction est perpendiculaire à celle de la droite.
On rappelle que toute droite du plan admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont trois nombres qui caractérisent la droite.On a alors le résultat suivant :

Vecteur normal

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et réciproquement.

On rappelle que le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la même droite. On peut remarquer que le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{v}$ est évidemment nul...

Exercice 4 Déterminer l'équation cartésienne de la droite d de vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-1, 3)$.

6.1.2 Le cercle

Soit $M(x; y)$ et le cercle de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon r. ‘Quelle condition doivent réunir les coordonnées x et y pour que M appartienne à ce cercle ?
La relation $\Omega M = r$ donne :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$$

appelée **équation cartésienne** du cercle de centre Ω et de rayon r.

Exercice 5 Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(2; 1)$ et de rayon $r = 5$.

❶ Déterminer l'équation cartésienne de ce cercle.
❷ Prouver que le point $C(6; 4)$ appartient à ce cercle.
❸ Déterminer l'équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ passant par C.
❹ Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite D d'équation $x + 2y - 9 = 0$.

6.2 Relations métriques et trigonométriques dans le triangle

On considère un triangle ABC. On appelle a la longueur BC et $\widehat{A}$ l'angle $\widehat{BAC}$, puis b la longueur AC,... Alors :

$$AB^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}).(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} + 2 \times \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$$

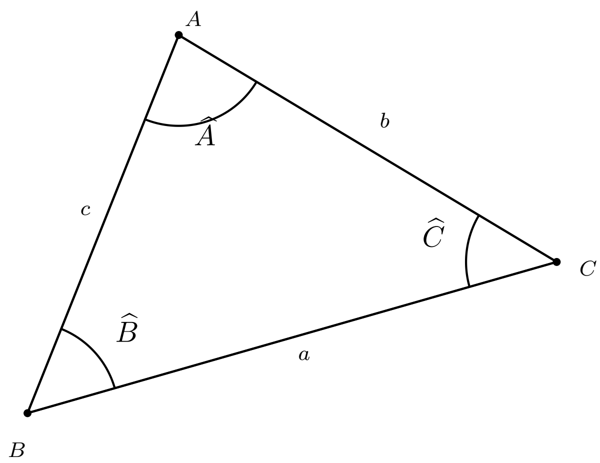
Mais :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -CA \times CB \times \cos\widehat{C}.$$

D'où avec les notations définies ci-dessus :

Formules d'Al-Kashi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$



Exercice 6 Soit A et B deux points et I leur milieu. Soit M un point quelconque du plan.

❶ Justifier que $MI^2 = \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI}$.

❷ Prouver que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$

❸ En déduire la relation $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.

❹ De la même façon, que peut-on dire de $MA^2 - MB^2$?

6.3 Formule de duplication

Cosinus d'une somme

$$\cos{(a+b)} = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Considérons les points A et B du cercle trigonométrique repérés respectivement par a et b.
D'une part,

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OB \times OA \times \cos{(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})} = \cos{(b-a)}$$

et d'autre part,

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$$

D'où l'égalité :

$$\cos{(b-a)} = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$$

En posant $A = -a$ et $B = b$ dans cette égalité et en utilisant le s propriétés du cosinus et du sinus, on obtient :

$$\cos{(A+B)} = \cos A \times \cos B + \sin A \times \sin B$$