Angles orientés et Trigonométrie

Table des matières

Section 1

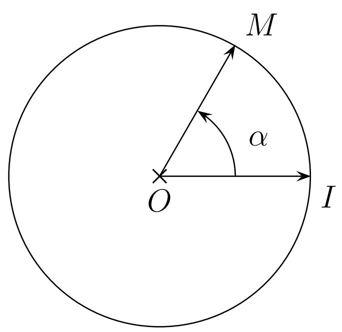
Le radian

Le radian est une mesure d'angle. Précisément , nous avons la définition suivante :

Définition

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r. Un radian est la mesure d'un angle qui intercepte un arc de longueur égale à celle du rayon.

Si la mesure de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ est égale au rayon r alors α vaut 1 radian.



On exprime souvent la mesure des angles en radian par une fraction de π. Aussi a t-on les correspondances suivantes :

Angle en degré	90	180	60	45
Angle en radian	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$

En effet un angle de 90 degrés intercepte un arc de longueur $\frac{\pi}{2}$...

Section 2

Angles orientés

2.1 Orientation du plan

Définition

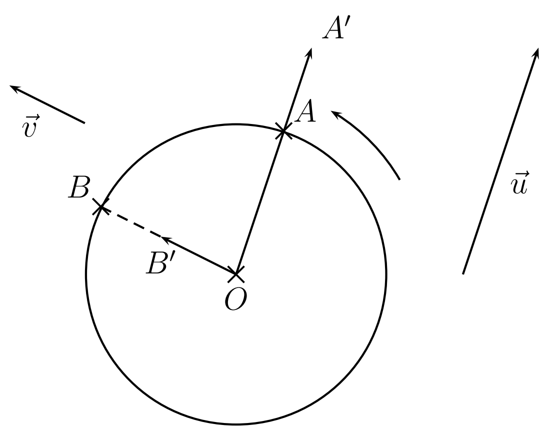
On utilisera le vocabulaire suivant :

- *Orienter un cercle*, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé *sens direct* (ou positif). L'autre sens est appelé *sens indirect* (négatif ou rétrograde).
- *Orienter le plan*, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens. L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (appelé aussi *sens trigonométrique*).
- *Un cercle trigonométrique* est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1. Lorsque le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le cercle trigonométrique est le cercle orienté dans le sens direct, de centre O et de rayon 1.

Dans la suite du chapitre, on suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique.

2.2 Angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté, O un point quelconque et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.
On considère A' et B' les points définis par $\vec{OA'} = \vec{u}$ et $\vec{OB'} = \vec{v}$.
Les demi-droites $[OA')$ et $[OB')$ coupent le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ respectivement en A et en B (voir le schéma ci-contre).



Définition

Une *mesure* de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$, en radian, est une mesure de l'arc orienté associé $\overset{\frown}{AB}$ du cercle trigonométrique.

On peut ainsi toujours se ramener au cercle trigonométrique !

— Si une des mesures de $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est α, alors toutes les mesures sont de la forme $\alpha + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
— Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures.
On écrit par exemple $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ signifiant **qu'une** des mesures de $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est $\frac{\pi}{2}$, les autres étant de la forme $\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
On écrit aussi $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ou encore $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ qui se lit « $\frac{\pi}{2}$ *modulo* 2π ».

Définition

La *mesure principale* d'un angle orienté est l'unique mesure de cet angle orienté qui appartient à $]-\pi\,;\,\pi]$.

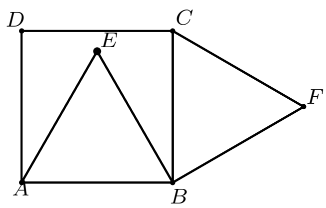
Exercice 1 Déterminer la mesure principale des angles ci-dessous :

❶ $\alpha = \dfrac{29\pi}{4}$ ❷ $\alpha = \dfrac{2003\pi}{6}$ ❸ $\alpha = -\dfrac{154\pi}{3}$ ❹ $\alpha = 14$

Propriétés

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non nuls** du plan orienté.
— Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que la mesure principale de $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est 0 (angle nul) ou est π (angle plat).
— Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux revient à dire que la mesure principale de $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est $\frac{\pi}{2}$ (angle droit direct) ou $-\frac{\pi}{2}$ (angle droit indirect).

Exercice 2 On considère la figure suivante composée du carré $ABCD$ et des triangles équilatéraux ABE et BCF.



Démontrer en utilisant la propriété précédente, que les points D, E et F sont alignés.

2.3 Propriétés des mesures des angles orientés

Propriétés

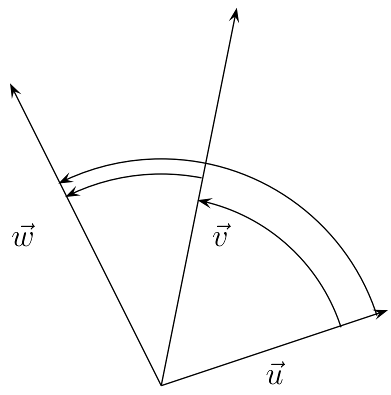
Soit un vecteur non nul $\vec{u}$ du plan orienté et $k \in \mathbb{R}$.

— $(\vec{u}\,;\,\vec{u}) = 0$ et $(\vec{u}\,;\,-\vec{u}) = \pi$.
— Si $k > 0$ alors $(\vec{u}\,;\,k\vec{u}) = 0$.
— Si $k < 0$ alors $(\vec{u}\,;\,k\vec{u}) = \pi$.

Propriété :Relation de Chasles

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté.

$$(\vec{u}\,;\,\vec{v}) + (\vec{v}\,;\,\vec{w}) = (\vec{u}\,;\,\vec{w})$$

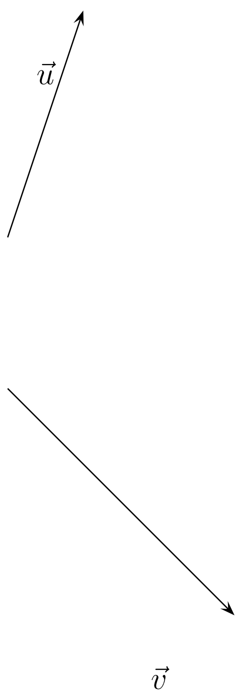


On en déduit :

Propriétés

Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté, k et k' deux réels.

- $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = -(\vec{v}\,;\,\vec{u})$.
- $(\vec{u}\,;\,-\vec{v}) = (\vec{u}\,;\,\vec{v}) + \pi$.
- $(-\vec{u}\,;\,\vec{v}) = (\vec{u}\,;\,\vec{v}) + \pi$.
- $(-\vec{u}\,;\,-\vec{v}) = (\vec{u}\,;\,\vec{v})$.
- Si k et k' sont de même signe, $(k\vec{u}\,;\,k'\vec{v}) = (\vec{u}\,;\,\vec{v})$.
- Si k et k' sont de signes opposés, $(k\vec{u}\,;\,k'\vec{v}) = (\vec{u}\,;\,\vec{v}) + \pi$.



Exercice 3 On sait que l'angle $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ a une mesure égale à 0,5 radian.Déterminer la mesure des angles suivants :

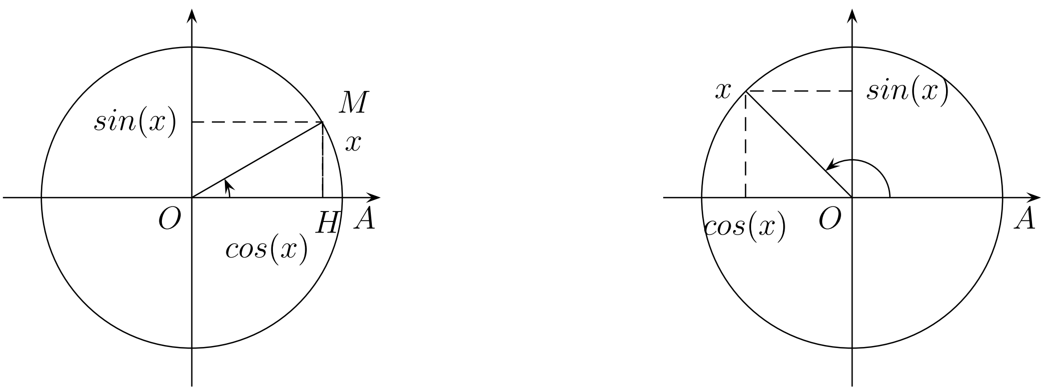
❶ $(-\vec{u}\,;\,\vec{v})$ ❷ $(3\vec{u}\,;\,2\vec{v})$ ❸ $(\vec{u}\,;\,-4\vec{v})$

2.4 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Sauf indication contraire, l'unité utilisée est le radian. Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$; on considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O.

Définition

Pour tout réel x, il existe un point M unique du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ tel que x soit une mesure de $\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)$.
- L'abscisse du point M est le cosinus de x (noté $\cos x$).
- L'ordonnée du point M est le sinus de x (noté $\sin x$)



Ces définitions sont compatibles avec les définitions données en classe de collège. En effet, dans le triangle rectangle OMH , on a :

$$\cos(x) = \frac{OH}{OM} = OH \text{ et } \sin(x) = \frac{MH}{OM} = MH \text{ car } OM = 1.$$

Exercice 4 Soit x un nombre réel de l'intervalle $I = [-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

❶ Déterminer le tableau de variations de la fonction f définie sur I par $f(x) = \sin(x)$.

❷ Déterminer le tableau de variations de la fonction g définie sur I par $g(x) = \cos(2x)$.

Définition

La tangente d'un angle non droit est égale au rapport du sinus de cet angle sur le cosinus de cet angle. La tangente d'un angle droit n'existe pas.

$$\text{Si } \alpha \neq \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ alors } \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Section 3
Trigonométrie

3.1 Rappels

Propriétés

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

C'est l'expression du théorème de Pythagore dans le triangle OMH évoqué ci-dessus.

Propriétés

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Ces mesures d'angles sont liées aux figures élémentaires comme le triangle équilatéral ou le triangle rectangle isocèle.

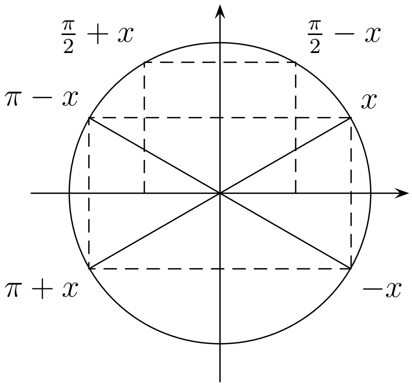
3.2 Lignes trigonométriques

Les formules ci-dessous sont vraies pour tout réel x.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$



$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

Ces formules doivent avant tout être comprises ; on peut facilement les reconstruire à l'aide du cercle trigonométrique. On rappelle que :

- Les angles x et $\dfrac{\pi}{2} - x$ sont complémentaires car leur somme est la mesure d'un angle droit.
- Les angles x et $\pi - x$ sont supplémentaires car leur somme est la mesure d'un angle plat.

3.3 Formules de duplication

Propriétés

Quels que soient les nombres x et y, on a :

❶ $\cos(x+y) = \cos(x)\times\cos(y) - \sin(x)\times\sin(y)$

❷ $\cos(x-y) = \cos(x)\times\cos(y) + \sin(x)\times\sin(y)$

❸ $\sin(x+y) = \sin(x)\times\cos(y) + \sin(y)\times\cos(x)$

❹ $\sin(x-y) = \sin(x)\times\cos(y) - \sin(y)\times\cos(x)$

Ces formules seront démontrées dans le cours sur le produit scalaire.

3.4 Résolutions d'équations trigonométriques

Résoudre une équation trigonométrique c'est résoudre une équation de la forme $\cos x = \alpha$ ou $\sin x = \alpha$ où α est un réel donné. Déjà si $\mid \alpha \mid > 1$ alors ces équations n'ont pas de solutions !

Propriétés

Soit une équation de la forme $\cos x = \alpha$.
Si on trouve un a tel que $\cos a = \alpha$ alors l'équation est équivalente à l'équation $\cos x = \cos a$ et les solutions de l'équation sont les réels $a + k \times 2\pi$ et les réels $-a + k \times 2\pi$, où k entier quelconque.

Exemple 1 Résoudre l'équation $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Dans la tableau des valeurs remarquables, on voit que $\dfrac{\pi}{3}$ est une solution particulière de l'équation. Donc, les solutions sont les nombres x tels que :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Propriétés

Soit une équation de la forme $\sin x = \alpha$.
Si on trouve un a tel que $\sin a = \alpha$ alors l'équation est équivalente à l'équation $\sin x = \sin a$ et les solutions de l'équation sont les réels $a + k \times 2\pi$ et les réels $\pi - a + k \times 2\pi$, où k entier quelconque.

Exemple 2 Résoudre l'équation $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Dans la tableau des valeurs remarquables, on voit que $\dfrac{\pi}{4}$ est une solution particulière de l'équation. Donc, les solutions sont les nombres x tels que :

$$\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ou encore } \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$